Série A, n° 4128
N° d'ordre :
4979

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre ALAIS

1re **THÈSE.** — Calcul analogique de systèmes physiques linéaires ; application a l'étude statique et dynamique d'ossatures hyperstatiques.

2e **THÈSE.** — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 20 juin 1963 devant la Commission d'Examen.

MM. ROCARD *Président.*
SIESTRUNCK, MALAVARD *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1964

SÉRIE A, N° 4128
N° D'ORDRE :
4979

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre ALAIS

1re THÈSE. — CALCUL ANALOGIQUE DE SYSTÈMES PHYSIQUES LINÉAIRES ; APPLICATION A L'ÉTUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE D'OSSATURES HYPERSTATIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 20 juin 1963 devant la Commission d'Examen.

MM. ROCARD *Président.*
SIESTRUNCK } *Examinateurs.*
MALAVARD }

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR
55, Quai des Grands-Augustins, 55
—
1964

UNIV. LEIDEN BIBL.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des Êtres organisés.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER.....	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie S. P. C. N. et Sédim.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS R.....	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des Fluides.
DANJON	T	Astronomie.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des Nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG.....	T	Pétrographie.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'Atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théories physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J P. MATHIEU	T	Physique Optique.
COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P.C.B).
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (Technique aéronaut.).
BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
NORMANT	T	Chimie organique.
BÉNARD	T	Chimie minérale.
BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON ..	T	Physiologie de la nutrition.
SALEM.....	T	Mathématiques générales.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et Histologie comparée.
EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GODEMENT	T	Mathématiques (M. P. C.).
PISOT	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
RIZET.....	T	Génétique.
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT ...	T	Physique théorique.
DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
Mme CHAIX.....	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY ...	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PIAUX	T	Chimie (M. P. C.).
BRUN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LÉDERER	T	Chimie biologique.
Mme DUBREIL	T	Mathématique (Agrégation).
Mme LELONG.....	T	Mathématiques II (E. N. S.).
BELLAIR'	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE	T	Physique Électricité.
DUBOIS J. E.....	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL A.....	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER.....	T	Physiologie comparée.

CAMUS	T	Physiologie végétale (B. M. P. V.).
CASTAING	T	Physique II Thermod. (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).
NOIROT	T	Évolution des Êtres organisés.
PANNETIER	T	Chimie générale.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et Radioactivité.
TONNELAT	T	Biologie physicochimique.
VILLE	T	Économétrie.
WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biologie vég. S. P. C. N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LUCAS G.	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales.
BRICARD	T	Météorologie et Physique de l'Atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Orsay).
M. JULIA	T	Études des Moléculaires naturelles complexes.
LENDER	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimie des radioéléments.
Mlle QUINTIN	T	Électrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Physiologie végétale B. M. P. V. (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie M. P. C. (Orsay).
CHATELET M.	T	Chimie P. C. B.
JEAN	T	Physique nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique S. P. C. N.
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Électronique (Orsay).
BOUISSIÈRES		Chimie des radioéléments (Orsay).
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLENBERGER	T	Géologie des grandes régions du Globe.
FRANC	T	Biologie animale P. C. B.
SCHNELL		Botanique tropicale (Orsay).
STOLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER		Chimie biologique (Orsay).
BAUDOIN		Biologie animale P. C. B.
BEAUMONT		Biologie animale S. P. C. N.
BLAMONT	T	Géophysique ionosphère.
BOURREAU		Botanique.
CURIE D.		Physique M. G. P.
DURAND-DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des Probabilités.
CAILLEUX		Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN	T	Physique S. P. C. N.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL		Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires.
BROCHARD	T	Physique P. C. B. (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et Géologie dynamique.
COMOLET	T	Mécanique des Fluides.
CORABOEUF		Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE		Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale P. C. B.
JULLIEN J.		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathématique de la Physique (Orsay).
OLIVIER		Anthropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique E. N. S. (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques E. N. S. féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELES		Physique S. P. S. C. N.
AMAT		Physique P. C. B.
AUBOIN		Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL		Physique nucl. et radioactivité.
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-mer).
BRUHAT	T	Mathématiques M. P. C.
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL		Physique M. G. P. (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématique propéd. (Orsay).
D'ESPAGNAT		Physique théorique (Orsay).
FURON		Géologie S. P. C. N.
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale P. C. B.
GUILBERT		Physique (C. U. S. Orléans).
HUPE		Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE		Chimie P. C. B.
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des Fluides.
ROUBINE		Électronique.
SILBER	T	Chimie P. C. B.
UEBERSFELD	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.

Secrétaire général..... R. POULLAIN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538112_0039

Journal de Mécanique,
Vol. II, N° 3, Septembre 1963.

Calcul analogique de systèmes physiques linéaires

Application à l'étude statique d'ossatures hyperstatiques

par

Pierre ALAIS*,
Département de Mécanique, Université de Paris.

1. Introduction.

Plusieurs tentatives ont été faites pour résoudre par un procédé d'analogies électriques des systèmes d'équations linéaires sans tenir compte de leur origine ([5] et [10]). Le but de la présente étude est de résoudre, par de semblables analogies, les systèmes d'équations linéaires qui interviennent dans le calcul du comportement de nombreux systèmes physiques, en s'attachant à développer un modèle analogique qui suive d'aussi près que possible la structure même de l'exemple physique proposé : la construction d'une maquette simulatrice est ainsi substituée à l'écriture, toujours laborieuse pour un ensemble complexe, des équations du problème. Un tel dispositif élimine de ce fait tous les phénomènes d'instabilité parasites qui peuvent éventuellement résulter, même lorsque le système physique est parfaitement régulier, des transformations effectuées sur les équations dans les procédés classiques de résolution. D'intéressants travaux ([1], [2], [3], [4]) ont d'ailleurs été menés, avec ce souci, concernant le problème particulier des structures hyperstatiques, sans toutefois fournir à notre avis un outil définitif, adapté aux diverses hypothèses effectuées classiquement en résistance des matériaux ainsi qu'à une géométrie quelconque d'ossature.

* Assistant à la Faculté des Sciences de Paris.

Notre étude est issue de travaux préliminaires [8] concernant également le calcul statique des ossatures hyperstatiques, et l'extension à une classe plus générale de systèmes physiques a été esquissée dans une Note précédente [9]. Bien que les matrices inhérentes aux systèmes envisagés soient en général, et pour des raisons physiques évidentes, définies positives et symétriques et qu'il soit possible par conséquent de rendre tous leurs coefficients positifs dans un système de coordonnées approprié, l'usage des *variables naturelles* a été jugé, dans ce travail, préférable : outre l'intérêt que le technicien peut avoir à ne manipuler que des grandeurs directement transposées de celles auxquelles il est habitué dans les systèmes réels, on évite ainsi tout changement artificiel et parfois dangereux des variables et toute écriture d'équation, c'est-à-dire pratiquement tout travail d'attention fastidieux et source d'erreur. En contrepartie de ces avantages, on est cependant tenu de faire face à certaines difficultés; d'une part, il faut surmonter le problème en acceptant des coefficients des deux signes dans la matrice correspondante, ce qui conduit à utiliser pour constituer les réseaux analogiques, non plus des résistances passives auxquelles devraient nécessairement être associés des dispositifs à résistances négatives, de réalisation délicate et coûteuse, mais des selfs et des capacités alimentées par une source alternative à fréquence stabilisée : nous pensons montrer clairement dans ce qui suit que ce type de réseau, très peu employé jusqu'à présent en calcul analogique, donne d'excellents résultats. D'autre part, les coordonnées naturelles présentent en général l'inconvénient de ne pas être indépendantes, mais liées par des relations linéaires homogènes inhérentes à certaines propriétés internes des systèmes physiques : la traduction analogique de cette dépendance s'acquiert aisément à l'aide d'un réseau complémentaire superposé au réseau constitutif proprement dit. Ces deux difficultés résolues dans leur généralité, on appréciera, sur l'exemple proposé ci-après de l'étude des structures hyperstatiques sous charge stationnaire en régime élastique, les avantages résultant de la simulation fidèle du modèle physique; en particulier, l'édification du réseau général à l'image de la construction réelle à partir des éléments analogiques de chaque barre, réalisés de façon systématique en barrettes interchangeables, permet des montages très rapides et présente de plus un caractère didactique certain : même pour des structures relativement simples, il devient plus facile et plus sûr d'écrire les équations du fonctionnement électrique du réseau analogue, rapidement dessiné, que les équations inspirées directement par la résistance des matériaux. Enfin dans certains cas où l'analogie électrique semble peu praticable la théorie vaut cependant d'être présentée car les règles systématiques proposées pour la construction d'un réseau analogique peuvent aussi bien servir à la programmation du calcul par ordinateur.

2. Problème général.

2.1. Considérons un système physique possédant les propriétés suivantes :

a. L'état du système sous l'action d'une sollicitation extérieure donnée est représenté par un nombre fini n de *variables de position* φ_i dont les valeurs sont les inconnues du problème.

b. Le système est *linéaire, sans perte ni hérédité;* aux variables de position correspondent n *variables de tension* A_i par des relations

$$A_i = A_{ij}\varphi_j, \tag{1}$$

où les constantes A_{ij} sont des caractéristiques *connues* du système, de matrice symétrique et de déterminant non nul, de sorte que les A_i sont des inconnues équivalentes aux φ_i. L'énergie absorbée dans une transformation réversible élémentaire caractérisée par les variations arbitraires $d\varphi_i$ des variables de position a pour expression

$$dW = A_i\, d\varphi_i = A_{ij}\varphi_j\, d\varphi_i, \tag{2}$$

différentielle de la forme quadratique

$$W = \frac{1}{2} A_{ij}\varphi_i\varphi_j, \tag{3}$$

l'état de repos du système étant supposé correspondre aux valeurs nulles des φ_i.

c. Les variables de position satisfont, du fait de la nature interne du système, à p relations linéaires homogènes indépendantes ($p < n$)

$$\alpha_{li}\varphi_i = 0, \tag{4}$$

dont les coefficients α_{li} sont des constantes, connues à un facteur commun près, caractéristiques des liaisons considérées et indépendantes de l'état de sollicitation du système.

d. L'action extérieure qui donne aux φ_i leurs valeurs actuelles est telle que pour une déformation élémentaire $d\varphi_i$ effectuée à partir de la solution φ_i cherchée et compatible avec la dépendance (4), l'énergie absorbée par le système ait l'expression

$$dW = B_i\, d\varphi_i, \tag{5}$$

les B_i étant des constantes *connues* caractéristiques de la sollicitation. Bien entendu, du fait de la dépendance des φ_i, il n'y a pas, en général, identité des A_i et des B_i et la formulation (5) est indéterminée : pour une même sollicitation, il existe, au choix de l'utilisateur, une infinité de

collections (B_i) qui relient correctement dW aux déplacements ($d\varphi_i$) compatibles avec les liaisons du système.

2.2. La recherche des inconnues φ_i peut être envisagée, *d'un point de vue géométrique*, comme celle des coordonnées du point représentatif du système dans un espace vectoriel S_n à n dimensions. Les conditions (4) restreignent la position de ce point à un sous-espace S_{n-p}, dans lequel il peut être repéré au moyen de $n - p$ nouvelles variables indépendantes ψ_k; l'énergie W est une forme quadratique des ψ_k qui, dans une configuration physiquement acceptable, est définie positive

$$W = D_{lk}\psi_l\psi_k > 0, \tag{6}$$

le système ne pouvant qu'absorber de l'énergie de l'extérieur à partir de l'état 0. Les données extérieures B_i, composantes d'un vecteur à n dimensions, sont telles, d'après (5), que ce vecteur se projette dans S_{n-p} selon le gradient de l'énergie dans ce sous-espace au point représentatif de l'état du système; l'indétermination des B_i n'est donc autre que celle de la composante du vecteur (B_i) extérieure à S_{n-p}. Il est clair alors que l'ensemble des données équivaut à la connaissance des coefficients D_{lk} et des composantes G_l du gradient de W dans le sous-espace S_{n-p} : la détermination des φ_i revient donc à la résolution du système

$$D_{lk}\psi_k = G_l, \tag{7}$$

dont la solution est unique puisque, d'après (6), le déterminant des D_{lk} n'est pas nul. On conçoit donc que, malgré l'indétermination des B_i, les données (3), (4) et (5) posent correctement le problème.

2.3. Du point de vue purement *énergétique*, qui est le plus fructueux dans la transposition analogique, on peut résumer la description du système de la manière suivante :

Étant donné un mode de représentation (φ_i), on peut écrire l'énergie W emmagasinée par le système dans l'état (φ_i) selon une forme quadratique (3). La matrice des A_{ij} traduit, dans la représentation choisie, la faculté d'absorption d'énergie du système lors d'une déformation arbitraire; les variables de tension attachées à cette forme n'ont pas nécessairement une interprétation intéressante et n'ont pas toujours lieu d'être explicitées.

Les relations de dépendance (4) précisent et imposent une certaine répartition de l'énergie dans le système.

L'expression (5) de la différentielle dW traduit la faculté du système extérieur de fournir effectivement de l'énergie au système étudié.

3. Principe de la méthode analogique.

3.1. La constitution d'un dispositif analogique susceptible de résoudre numériquement les problèmes précédents est envisagée ici au moyen de réseaux d'impédances dans lesquels le potentiel électrique Φ, variable essentielle par la simplicité de sa mesure, prend en n points précisés (i) des valeurs qui sont celles des inconnues φ_i. Considérons, par exemple, le circuit élémentaire de la figure 1, où deux nœuds sont reliés entre eux

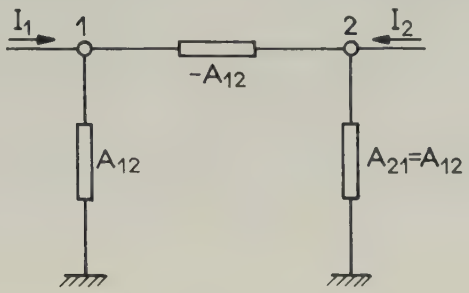

Fig. 1.

par une conductance opposée à celle qui les joint à la masse; les intensités I qui alimentent extérieurement les nœuds dépendent des potentiels en ces points selon les relations de Kirchhoff

$$I_1 = A_{12}(\Phi_1 - 0) - A_{12}(\Phi_1 - \Phi_2),$$
$$I_2 = A_{12}(\Phi_2 - 0) - A_{12}(\Phi_2 - \Phi_1),$$

de sorte que ce dispositif, si l'on adjoint aux nœuds des conductances de fuite complémentaires désignées respectivement par A_{11} et A_{22}, réalise automatiquement entre intensités et potentiels la correspondance linéaire à matrice symétrique

$$(8) \qquad \begin{cases} I_1 = A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2, \\ I_2 = A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2, \\ \quad (A_{12} = A_{21}). \end{cases}$$

D'une manière générale, on voit, par superposition, qu'à partir de toute matrice carrée A_{ij} *symétrique* d'ordre n il est possible de réaliser, avec des conductances positives et négatives résultant d'un certain nombre de circuits du type précédent, un réseau à n nœuds dans lequel les intensités I injectées aux nœuds sont reliées aux potentiels de ceux-ci par les relations $I_i = A_{ij}\Phi_j$: il suffit pour cela que chaque nœud i soit joint à la masse par la conductance $C_i = \sum_j A_{ij}$ et à l'un quelconque j

des autres nœuds par la conductance $C_{ij} = -A_{ij}$. La puissance dissipée par un tel réseau est

$$P = \Phi_i I_i = A_{ij} \Phi_i \Phi_j,$$

ou encore, par suite de la symétrie supposée de la matrice A_{ij},

$$P = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_j A_{ij} (\Phi_i - \Phi_j)^2 + \sum_i \left(\sum_j A_{ij} \right) \Phi_i^2$$

$$= - \sum_{i<j} \sum A_{ij} (\Phi_i - \Phi_j)^2 + \sum_i \left(\sum_j A_{ij} \right) \Phi_i^2,$$

forme où apparaissent directement les deux sortes de conductances du réseau et les différences de potentiel sous lesquelles elles fonctionnent.

Dans ces conditions, étant donné un système physique satisfaisant aux définitions *a* et *b* du paragraphe 2.1, nous appellerons *réseau constitutif* de l'analogie l'ensemble des conductances C_i, C_{ij} précédentes; du point de vue énergétique, la puissance électrique dissipée par le réseau est double de l'énergie absorbée par le système proposé, potentiels Φ aux nœuds et intensités I injectées en ces points étant respectivement analogues des variables de position φ et de tension A du système *dans sa déformation la plus générale.*

3.2. Il importe alors que les relations (4) soient satisfaites de manière automatique par les valeurs du potentiel aux nœuds du réseau constitutif. Mais pour que la traduction, au moyen de la relation (5), des conditions extérieures imposées au système considéré soit possible, il importe que le réseau auxiliaire employé pour traduire les relations (4) n'altère pas la correspondance analogique entre l'énergie emmagasinée par le système physique et la puissance dissipée par le réseau constitutif, et soit par conséquent *non dissipatif;* on peut atteindre ce résultat par association de circuits élémentaires du type déjà utilisé, élaborés cette fois entre les nœuds du réseau constitutif et un ensemble de p centres auxiliaires dont chacun est associé à l'une des relations (4). Si s désigne le nœud relatif à l'équation $\alpha_{si} \Phi_i = 0$, l'étoile obtenue en disposant (*fig.* 2) entre s et les divers nœuds i des circuits analogues à celui de la figure 1 constitue d'après ce qui précède le réseau associé à une matrice symétrique de rang au plus égal à $n + 1$ et possédant seulement une ligne et une colonne de coefficients non nuls; l'intensité L_s injectée au nœud s s'identifie au premier membre de l'équation envisagée, laquelle est donc traduite en laissant ce nœud sans alimentation :

$$L_s = \alpha_{si} \Phi_i = 0.$$

Les intensités injectées à partir des nœuds i à ce réseau particulier sont d'autre part proportionnelles à Φ_s

$$L_i = \alpha_{si} \Phi_s$$

et la dissipation globale

$$P = L_i \Phi_i + L_s \Phi_s = 2 \Phi_s \alpha_{si} \Phi_i$$

est nulle.

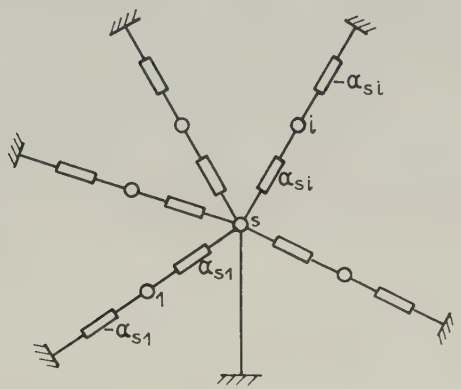

Fig. 2.

Si donc on adjoint au réseau constitutif le réseau de transmission formé des étoiles relatives aux p liaisons (4), l'ensemble à $n + p$ nœuds obtenu dissipe la même puissance que le constitutif seul tout en ne fonctionnant que dans des conditions où les potentiels aux nœuds satisfont aux équations (4).

3.3. La matrice symétrique B_{lk} de rang $n + p$ associée au réseau total ainsi construit relie les intensités K injectées aux nœuds à leurs potentiels selon

$$K_l = B_{lk} \Phi_k, \qquad l, k = (\ldots, i, \ldots, n, \ldots, s, \ldots, p).$$

Toutefois, seules les intensités K_i ne sont pas nulles, qui sont injectées de l'extérieur et sont responsables de l'état de potentiel établi. Elles diffèrent évidemment des intensités I_i alimentant le réseau constitutif mais la puissance dissipée dans le réseau peut s'écrire indifféremment

$$P = K_l \Phi_l = K_i \Phi_i = I_i \Phi_i$$

suivant qu'on explicite ou non la dissipation du réseau de transmission qu'on sait être nulle.

A une modification élémentaire $d\mathbf{\Phi}_l$ des conditions de fonctionnement, c'est-à-dire de l'alimentation K_l, correspond la variation de la dissipation

$$\begin{aligned} dP &= K_l\, d\Phi_l + \Phi_l\, dK_l \\ &= B_{lk}\Phi_k\, d\Phi_l + B_{lk}\Phi_l\, d\Phi_k = 2\, B_{lk}\Phi_k\, d\Phi_l \\ &= 2\, K_l\, d\Phi_l = 2\, K_i d\Phi_i = 2\, I_i\, d\Phi_i, \end{aligned}$$

en vertu de la symétrie des matrices B_{lk} et A_{ij} associées respectivement au réseau total et au réseau constitutif.

Les données finales (5) du problème physique sont donc satisfaites, dans l'analogie $P = 2\,W$, *si l'on identifie les coefficients* B_l *aux intensités* K_l *à injecter de l'extérieur aux nœuds du réseau constitutif;* l'indétermination des B_l entraîne celle de l'alimentation mais, quelle que soit la collection (B_l) adoptée pour représenter l'échange élémentaire d'énergie entre le milieu extérieur et le système, la redistribution interne des intensités par le réseau de transmission assure la permanence des niveaux de potentiel aux nœuds du réseau constitutif et l'unicité de la détermination analogique.

4. Application aux structures hyperstatiques. Adaptation du problème à la formulation générale.

4.1. La résistance des matériaux permet, de manière classique et dans des hypothèses que nous supposerons satisfaites ici, d'étudier la déformation de toute barre soumise à une répartition connue des forces extérieures dans des conditions d'extrémités précisées (par exemple pour des déplacements imposés, en translation et rotation, des sections extrêmes). Il en résulte que, dans une structure réticulée à nœuds rigides, la connaissance des déplacements des différents nœuds sous l'action d'un système de charges données ramène l'étude de résistance à une suite de calculs élémentaires de poutres : nous appellerons *déformation simplifiée* de la structure une collection adéquate de paramètres décrivant dans chaque cas de charges les déplacements des nœuds. La plupart des méthodes de calcul des structures continues prennent la déformation simplifiée comme inconnue principale et nous les suivrons en cela. Mais en général elles traduisent analytiquement l'équilibre de chaque nœud sous l'action des efforts exercés par les différentes barres qui y aboutissent; l'écriture pénible des équations d'un système dont l'ampleur croît très vite avec la complexité de la structure rend le problème peu agréable à traiter, même au moyen d'ordinateurs à grande capacité : en le formulant d'une manière qui le place parmi ceux résolubles par l'analogie électrique décrite dans les paragraphes précédents, nous pouvons donc espérer obtenir un procédé exempt de formulation analytique et qui, par son adaptation directe au problème, procure un gain appréciable en temps d'attention et en investissement de matériel.

4.2. Notion de système d'efforts équivalents aux nœuds.

Pour une structure donnée, il existe une infinité de systèmes d'efforts provoquant la même déformation simplifiée et nous dirons que ces systèmes sont dans cette mesure équivalents. Il est commode d'introduire plus particulièrement un système auxiliaire de forces et de couple qui, appliqués seulement aux nœuds de la structure, équivalent à la répartition des forces extérieures envisagée. L'existence d'un tel système est assurée du seul fait de la linéarité des déformations, en particulier de la déformation simplifiée, par rapport aux efforts extérieurs qui les créent, et sa détermination peut être envisagée comme suit :

Pour maintenir, sous charge, les nœuds A, B, ... de la structure à leur position initiale en l'absence de charge, il faut exercer sur ces nœuds un système de forces et de couples de blocage $\mathbf{f}_a$ et $\mathbf{m}_a$ qui sont aisément calculables en déterminant par la résistance des matériaux les efforts d'extrémités susceptibles d'empêcher dans chaque barre tout déplacement de ces points, puis en sommant à chaque nœud les actions correspondant à toutes les barres qui y aboutissent. L'adjonction, dans ces conditions, du système $\mathbf{F}_a = -\mathbf{f}_a$, $\mathbf{M}_a = -\mathbf{m}_a$, qui détruit le blocage, conduit à la déformation créée par le système extérieur. Dans l'hypothèse de linéarité, il est clair que le système $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{M}_a$, appliqué seul, donne dans la structure la même déformation simplifiée que l'ensemble de charges envisagé. Un tel système, *équivalent* (au sens indiqué précédemment) aux forces extérieures et *appliqué* exclusivement aux sommets de la structure sera dit *système équivalent aux nœuds.*

4.3. Choix des paramètres constituant la déformation simplifiée.

Un choix naturel consiste à utiliser les coordonnées des rotations φ_a et des translations $\delta\mathbf{A}$ de chaque nœud A. Ces variables ne sont pas toujours indépendantes et il peut apparaître entre elles d'éventuelles dépendances linéaires du fait des liaisons extérieures du système ou des particularités du comportement élastique des éléments constituant la structure. Ainsi, pour un élément droit, on admet dans de nombreux cas que les déformations produites par les efforts normaux sont négligeables en regard de celles dues aux moments et aux efforts tranchants, ce qui revient à dire que cet élément emmagasine de l'énergie élastique exclusivement en flexion-torsion. Cette hypothèse d'incompressibilité longitudinale pour un élément AB impose que sa déformation s'effectue à longueur constante et fait apparaître entre les déplacements $\delta\mathbf{A}$ et $\delta\mathbf{B}$ des extrémités la relation

$$(\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{A}).(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0, \tag{13}$$

traduisant la dépendance linéaire des paramètres correspondants. Nous verrons au chapitre suivant que, dans le cas, important du point de vue technique, où l'on admet cette hypothèse pour tous les éléments de la structure, il est possible d'utiliser pour décrire les translations des nœuds les rotations globales des barres. Ce choix très homogène des variables de position introduit d'importantes simplifications dans la représentation analogique, permettant en particulier d'associer à chaque barre d'une structure plane un réseau constitutif intrinsèque. Il subsiste cependant entre les nouvelles variables des dépendances linéaires qui, exprimant la compatibilité des déplacements avec la persistance des différentes mailles de la structure, traduisent les propriétés géométriques du système.

4.4. Le modèle analogique sera alors entièrement défini lorsqu'on aura exprimé, dans le mode de représentation choisi, l'énergie élastique emmagasinée par chaque élément un à un et, en sommant, par la structure entière, à l'aide d'une forme quadratique

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \varphi_i \varphi_j,$$

les M_{ij} étant des coefficients élastiques déterminés par l'étude particulière de chaque barre.

Enfin la donnée (5) traduisant le système extérieur s'obtient en substituant au système de charges envisagé le système équivalent aux nœuds et en exprimant l'énergie élémentaire que ce dernier apporte à la structure dans une variation élémentaire $(d\varphi_i)$ de la déformation simplifiée.

5. Structures hyperstatiques de pièces droites incompressibles à nœuds rigides.

5.1. Formulation proposée.

1° *Déformation simplifiée.* — *a.* Les rotations indépendantes φ_a des divers sommets A, B, ... de la structure sont repérées par leurs composantes φ_{a_i} dans un système cartésien quelconque $(\mathbf{u}_i)$.

b. Du fait que les divers éléments composant la structure sont supposés se déformer à longueur constante, on peut utiliser pour décrire les déplacements des sommets, en lieu et place de leurs composantes δA_i selon le système $(\mathbf{u}_i)$, celles φ_{c_i} des rotations globales des diverses barres C, D, ..., à savoir, si la barre C joint les sommets A et B,

$$\varphi_c = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \wedge (\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{A})}{(AB)^2}.$$

On peut remonter de façon évidente des φ_{c_i} aux δA_i dans la mesure où les rotations globales qu'on se donne ainsi sont compatibles avec la géométrie de la structure. Ce qui revient à dire qu'il est indifférent de

choisir les m' inconnues δA_i connaissant leurs p' dépendances linéaires dérivées des relations (13), ou les m inconnues φ_{l_i} et leurs p dépendances linéaires exigeant que toute solution proposée soit compatible avec la structure; ce qui, dans l'un et l'autre cas, permet de décrire les k ($k = m - p = m' - p'$) degrés de liberté du système envisagé, concernant les translations des nœuds.

Pour expliciter ces p relations linéaires entre les φ_{l_i} il suffit d'exprimer que les mailles fermées de la structure restent fermées au cours de la déformation. Par exemple, pour la maille CD...NC constituée par la succession des barres CD...N et définie par

$$\mathbf{C} + \mathbf{D} + \ldots + \mathbf{N} = 0, \tag{14}$$

on doit avoir

$$\delta\mathbf{C} + \delta\mathbf{D} + \ldots + \delta\mathbf{N} = 0, \tag{14'}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_c \wedge \mathbf{C} + \ldots + \varphi_n \wedge \mathbf{N} = 0,$$

relation vectorielle conduisant à trois relations linéaires homogènes de la forme

$$\alpha_{sl_i}\varphi_{l_i} = 0 \tag{15}$$

dont les coefficients, du fait de la relation (14), ont une somme nulle

$$\sum_{l_i} \alpha_{sl_i} = 0. \tag{16}$$

On peut trouver ainsi un nombre en général surabondant de relations (15). Il suffit d'en conserver p d'entre elles indépendantes et suffisantes pour traduire entièrement la géométrie de la structure.

2° *Coefficients élastiques.* — La structure étant supposée attaquée par le système équivalent aux nœuds, précédemment défini, une quelconque barre C dont la déformation simplifiée est représentée par les trois vecteurs φ_a, φ_b, φ_c, subit au niveau de ses extrémités A et B les couples $\mathbf{M}_a$ et $\mathbf{M}_b$ et les forces $\mathbf{F}_a$ et $\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a$ formant un couple

$$\mathbf{M}_c = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \wedge \mathbf{F}_b = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \wedge \mathbf{F}_a;$$

la dépendance linéaire entre efforts et déformations se traduit alors par les relations

$$\mathrm{M}_{l_i} = \mathrm{M}_{l_i k_j}\varphi_{k_j}, \tag{17}$$

k et l désignant a, b ou c et la répétition de l'indice k_j signifiant la sommation sur la collection des neuf composantes a_1, a_2, ..., c_2, c_3.

La même formule donne aussi bien le couple exercé par le nœud L sur les barres qui y aboutissent que le couple exercé globalement sur la barre L, s'il s'agit d'une barre, à condition de convenir que la sommation

indiquée s'étend sur la collection entière des variables de position attachées à la structure en remarquant que seuls ne sont pas nuls les $M_{l_i k_j}$ correspondant à une combinaison l, k intérieure à une même barre.

On peut définir le coefficient $M_{l_i k_j}$ attaché à une barre comme étant la composante d'ordre i du couple (au sens généralisé) qu'il faut exercer en L sur cette barre quand elle est déformée en K selon la rotation unitaire $\varphi_k = \mathbf{u}_j$. Ces coefficients sont calculables pour chaque barre séparément et, du point de vue adopté, traduisent entièrement les propriétés élastiques de ces barres. Ils permettent d'associer aux variables de position φ_{l_i} les variables de tension M_{l_i}. L'énergie absorbée par la structure à partir des nœuds varie quand on passe de l'état de déformation (φ_{l_i}) à l'état $(\varphi_{l_i} + d\varphi_{l_i})$ selon

$$d\mathrm{W} = \mathrm{M}_{l_i}\, d\varphi_{l_i} = \mathrm{M}_{l_i k_i} \varphi_{k_j} d\varphi_{l_i},$$

de sorte que l'énergie emmagasinée à partir du repos pour aboutir à l'état (φ_{l_i}) vaut

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2} \mathrm{M}_{l_i k_j} \varphi_{l_i} \varphi_{k_j}.$$

La matrice carrée des $M_{l_i k_j}$ est, comme il est bien connu, nécessairement symétrique mais, de plus, la somme des coefficients de chaque ligne ou colonne est nulle. En effet, la somme des couples exercés sur une barre en équilibre devant être nulle, on a la propriété

$$\sum_{l} \mathrm{M}_{l_i k_j} = 0, \tag{18}$$

la collection ${}_i k_j$ étant fixée; *a fortiori*,

$$\sum_{l_i} \mathrm{M}_{l_i k_j} = 0, \tag{19}$$

en sommant sur toutes les variables, k_j étant fixé.

3° Il est facile d'évaluer l'énergie élémentaire

$$d\mathrm{W} = \mathbf{F}_k . d(\delta \mathbf{K}) + \mathbf{M}_k . d\boldsymbol{\varphi}_k$$

fournie par le système équivalent aux nœuds dans une déformation élémentaire, en termes des variables choisies

$$d\mathrm{W} = \mathfrak{M}_{l_i} d\varphi_{l_i}; \tag{20}$$

il faut toutefois remarquer que le fait de négliger les déformations engendrées par les efforts normaux, tout en introduisant des dépendances linéaires entre les variables φ_{l_i}, crée une indétermination du système équivalent aux nœuds puisque tout effort longitudinal peut être indifféremment exercé à l'une ou l'autre extrémité de chaque

élément. Ceci explique l'indétermination, prévue au chapitre 1, des coefficients $\mathfrak{M}_{l_i}$ associés aux variables dépendantes φ_{l_i} traduisant l'action extérieure exercée sur le système considéré.

5.2. Traduction analogique.

1° Le réseau constitutif ne comporte que les conductances reliant les nœuds électriques L_i et K_j, les conductances reliant chaque nœud à la masse disparaissant du fait de la propriété (19).

Il suffit pour édifier le réseau de transmission traduisant les dépendances linéaires des variables choisies d'appliquer la règle générale exposée au paragraphe 3.2. Dans de nombreux cas, les étoiles se réduisent énormément; par exemple, dans le cas de mailles en parallélogrammes, ce ne sont que de simples connections entre les nœuds de rotation globale des barres parallèles.

En dépit de l'indétermination constatée dans le calcul des $\mathfrak{M}_{l_i}$, l'injection des intensités $I_{l_i} = \mathfrak{M}_{l_i}$ aux nœuds électriques L_i établit dans le réseau le régime de potentiels Φ_{l_i} correspondant à la solution unique cherchée.

2° *Détermination des moments aux extrémités des barres.* — Ayant obtenu la déformation simplifiée de la structure sous l'action d'un système de charges donné, on peut achever l'étude de résistance barre par barre à partir des déplacements d'extrémités et des charges appliquées; mais souvent on peut se contenter de s'intéresser seulement aux moments exercés par les nœuds aux extrémités des barres. Or ces moments ont une interprétation analogique simple.

— *Le système de charges envisagé est appliqué directement aux nœuds;* il constitue son propre système équivalent aux nœuds et l'on a vu que le moment exercé par le nœud A sur la barre ACB a pour composante d'ordre i

$$M_{a_i} = M_{a_i l_j} \varphi_{l_j},$$

en sommant sur la collection des variables φ_{l_i} représentant la déformation de cette barre. La propriété (19) permet de récrire cette relation sous la forme

$$M_{a_i} = \sum_{l_j} M_{a_i l_j} (\varphi_{l_j} - \varphi_{a_i})$$

s'identifiant à l'équation électrique

$$I_{a_i} = \sum_{l_j} C_{a_i l_j} (\Phi_{a_i} - \Phi_{l_j});$$

le moment cherché a donc pour homologue dans l'analogie l'intensité véhiculée à partir du nœud électrique A_i sur tous les autres nœuds

attachés à la barre ACB. Cette intensité peut être mesurée ou calculée rapidement à partir des potentiels mesurés.

— *Le système de charges est quelconque* : si l'on se réfère à l'élaboration proposée au paragraphe 4.2 du système équivalent aux nœuds, on voit qu'une barre ACB est soumise de la part de l'extrémité A à la composante appropriée $\mathbf{m}_{a(abc)}$ du couple de blocage fournie par la résistance des matériaux, puis au moment $\mathbf{M}_{a(abc)}$ provenant de l'application libératrice du système équivalent aux nœuds et calculable comme on vient de le voir au paragraphe précédent; le moment cherché s'écrit donc

$$\mathbf{M}'_a = \mathbf{m}_a + \mathbf{M}_a.$$

5.3. Statique plane.

1° Les trois paramètres φ_a, φ_b, φ_c mesurant les rotations des extrémités A et B et la rotation globale de la barre C, suffisent pour traduire la déformation simplifiée *la plus quelconque* relevant d'un problème de statique plane.

Cette barre sera donc représentée dans l'analogie par un triangle de conductances

$$(C_{ab}, C_{bc}, C_{ac}) = -(M_{ab}, M_{bc}, M_{ac})$$

reliant les nœuds électriques A, B, C [2].

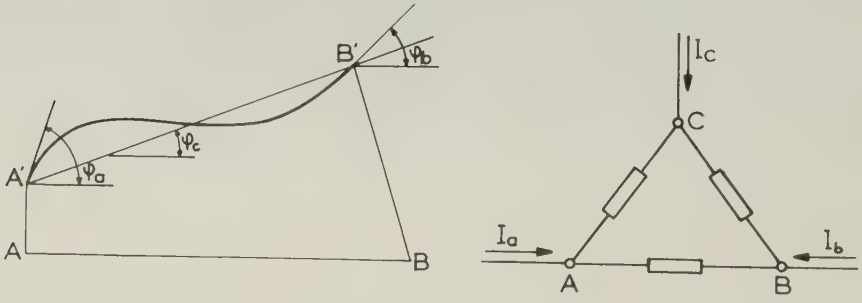

Fig. 3.

Lorsque la barre, attaquée à ses extrémités par les moments et forces $(M_a, \mathbf{F}_a)$, $(M_b, \mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a)$, est déformée selon $(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c)$, les rotations s'identifient aux potentiels des nœuds électriques A, B, C alors que I_a et I_b s'identifient à M_a, M_b et que I_c traduit le couple des forces $\mathbf{F}_a$ et $\mathbf{F}_b$

$$M_c = [(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \wedge \mathbf{F}_b].\mathbf{u}_3,$$

$\mathbf{u}_3$ désignant le vecteur unitaire normal au plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de la structure.

La condition d'équilibre

$$M_a + M_b + M_c = 0$$

est traduite dans l'analogie par l'évidence électrique

$$I_a + I_b + I_c = 0.$$

2° *Résultats concernant les pièces droites de section variable symétrique par rapport au plan de déformation.* — Une telle barre est caractérisée par sa portée AB $= l$ et la loi d'évolution J (x) du moment d'inertie J autour de l'axe central principal de sa section perpendiculaire au plan de déformation rapporté à un système d'axes approprié A xy (*fig.* 4).

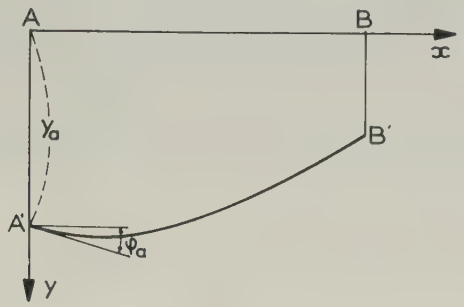

Fig. 4.

Pour simplifier les notations nous introduisons les intégrales

$$(21) \qquad \varkappa_n = \frac{1}{l^n}\int_0^x \frac{x^n}{J}\,dx, \qquad \lambda_n = \frac{1}{l^n}\int_0^x \frac{(l-x)^n}{J}\,dx,$$

liées entre elles de façon évidente selon

$$(22) \qquad \begin{cases} \lambda_0 = \varkappa_0, \\ \lambda_1 = \varkappa_0 - \varkappa_1, \\ \lambda_2 = \varkappa_0 - 2\varkappa_1 + \varkappa_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_n = \varkappa_0 - C_n^1 \varkappa_1 + \dots + (-1)^n \varkappa_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et satisfaisant aux relations

$$(23) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \varkappa_n\,dx = x\varkappa_n - l\varkappa_{n+1}, \\ \displaystyle\int_0^x \lambda_n\,dx = l\lambda_{n+1} - (l-x)\,\lambda_n, \end{cases}$$

utiles pour l'intégration de l'équation de flexion. On désignera par K_n et L_n les intégrales complètes de o à l.

Enfin on remarquera que, pour une poutre dont l'inertie est la même en des points symétriques par rapport au milieu de la portée, on a $K_n = L_n$, et enfin que si l'inertie de la section est constante

$$K_n = L_n = \frac{1}{(n+1)\Lambda}, \qquad \Lambda = \frac{J}{l},$$

où Λ est la *rigidité* ordinairement utilisée en ce cas.

Les *coefficients élastiques* résultent de l'étude de la déformation de la pièce attaquée à ses extrémités seules selon un système d'efforts M_a, $\mathbf{F}_a$ et M_b, $\mathbf{F}_b$ conservant son équilibre global et vérifiant donc les relations

$$\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a, \qquad M_c = [(\mathbf{B}-\mathbf{A}) \wedge \mathbf{F}_b].\mathbf{u}_3 = -M_a - M_b.$$

La déformée obtenue est indéterminée à un déplacement près et ne peut être précisée qu'en se donnant par exemple la rotation φ_a et le déplacement $\delta\mathbf{A} = y_a \mathbf{u}_3$; la déformée $y(x)$ à laquelle on impose ainsi

$$y(0) = y_a, \qquad y'(0) = \varphi_a,$$

vérifie l'équation de flexion

$$M = -EIy'',$$

où E est le coefficient d'élasticité du matériau et où M, moment des efforts de gauche, s'exprime par

$$M = M_a \frac{l-x}{l} - M_b \frac{x}{l}.$$

Deux intégrations successives fournissent les relations

$$E(y' - \varphi_a) = -M_a \lambda_1 + M_b \varkappa_1,$$
$$E(y - y_a - x\varphi_a) = -M_a[l\lambda_2 - (l-x)\lambda_1] + M_b(x\varkappa_1 - l\varkappa_2),$$

qui permettent, en faisant $x = l$ et en introduisant les deux autres paramètres de la déformation simplifiée

$$\varphi_b = y'(l) \qquad \text{et} \qquad \varphi_c = \frac{y_b - y_a}{l},$$

d'écrire, compte tenu des relations (22), la matrice des coefficients élastiques à partir des seuls coefficients K_0, K_1, K_2,

$$(24) \qquad \begin{cases} M_a = \dfrac{E}{\Delta}[K_2\varphi_a + (K_1 - K_2)\varphi_b - K_1\varphi_c], \\ M_b = \dfrac{E}{\Delta}[(K_1 - K_2)\varphi_a + (K_2 + K_0 - 2K_1)\varphi_b + (K_1 - K_0)\varphi_c], \\ M_c = \dfrac{E}{\Delta}[-K_1\varphi_a + (K_1 - K_0)\varphi_b + K_0\varphi_c], \end{cases}$$

où

$$\Delta = K_0 K_2 - K_1^2.$$

On vérifie sur ces expressions la propriété connue de symétrie des coefficients ainsi que la propriété (19); on sait d'ailleurs que seuls importent dans le montage analogique les valeurs de M_{ab}, M_{bc} et M_{ca}. Le réseau constitutif attaché à une telle barre comprend donc le triangle constitué des conductances

$$(25)\qquad \begin{cases} C_{ab} = \dfrac{E}{\Delta}(K_2 - K_1) = \dfrac{E}{\Delta}(L_2 - L_1), \\ C_{ac} = \dfrac{E}{\Delta} K_1 \qquad\qquad = \dfrac{E}{\Delta}(L_0 - L_1), \\ C_{bc} = \dfrac{E}{\Delta}(K_0 - K_1) = \dfrac{E}{\Delta} L_1. \end{cases}$$

Pour une poutre symétrique, on vérifie que $C_{ac} = C_{bc}$ et enfin dans le cas simple d'une section constante on obtient en introduisant la rigidité Λ

$$(26)\qquad C_{ab} = -2E\Lambda, \qquad C_{ab} = C_{bc} = 6E\Lambda.$$

Le réseau constitutif attaché à une structure plane constituée de pièces droites satisfaisant aux conditions de l'étude précédente résulte de l'association de tels réseaux triangulaires élémentaires calquant le montage de la structure; la géométrie n'intervient que dans le réseau de transmission.

Les moments de blocage, c'est-à-dire les moments qu'il faut exercer aux extrémités de la barre pour la bloquer dans sa position initiale malgré les charges appliquées, sont indiqués usuellement dans la littérature technique, tout au moins pour les barres de section constante, relativement à un grand nombre de profils de charge, et il est inutile d'y revenir ici.

5.4. Statique tridimensionnelle.

1° La déformation simplifiée d'une barre C est décrite par neuf paramètres mesurant les rotations dans l'espace φ_a et φ_b des extrémités A et B et la rotation globale φ_c. La barre rectiligne incompressible la plus quelconque sera donc représentée par un réseau de $C_9^2 = 36$ conductances qui, en plus de sa complexité, n'est en général pas intrinsèque, c'est-à-dire varie selon l'orientation de la barre par rapport aux axes choisis. Le cas général est donc beaucoup plus difficile à traiter qu'en statique plane.

2° Dans le cas pratique fréquent des *constructions trirectangulaires*, chaque poutre peut être parallèle à un axe de coordonnées et le problème se simplifie beaucoup.

a. Réseau constitutif. — Si l'on suppose que la section de la barre présente suffisamment de symétries pour qu'on puisse traiter indépen-

damment les flexions dans chaque plan de coordonnées et la torsion, le réseau représentant la barre se réduit à un triangle de conductances pour chacune des deux flexions et une conductance pour la torsion; les dissipations respectives de ces trois éléments analogiques traduisent les énergies de flexion et torsion emmagasinées par la barre. Si celle-ci est, de plus, homogène et de section constante, elle est caractérisée par deux rigidités principales de flexion et un coefficient de torsion, de sorte que le réseau correspondant par exemple à une position de la barre parallèle à $\mathbf{u}_2$ peut être constitué comme l'indique la figure 5, avec six nœuds de rotations d'extrémités A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, et deux nœuds de rotations globales C_1, C_3, relatifs aux déformations parallèles aux plans respectifs $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

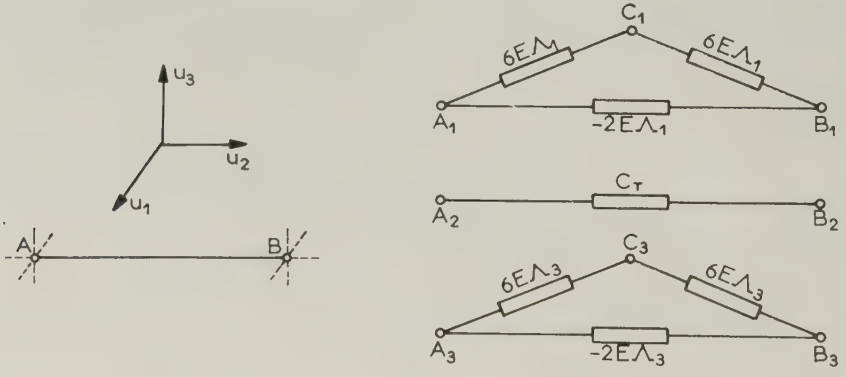

Fig. 5.

b. Réseau de transmission. — Les mailles planes qu'on peut discerner dans la structure sont le plus souvent limitées par quatre barres et évidemment rectangulaires. L'élaboration du réseau de transmission

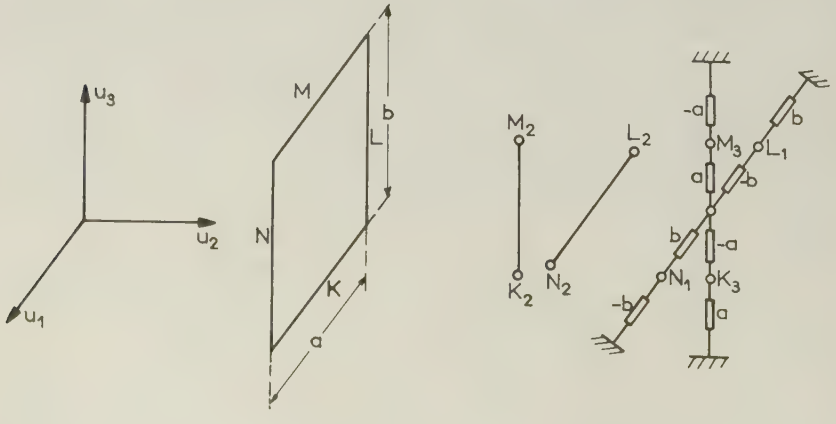

Fig. 6.

correspondant se réduit alors à connecter les nœuds des rotations globales des barres parallèles correspondant à la déformation plane de la maille et à construire une étoile traduisant son gauchissement. Ainsi pour la maille rectangulaire parallèle au plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, constituée par les barres KLMN de dimensions a et b (*fig.* 6), il faut, en plus des connections évidentes entre les nœuds de rotations globales M_2 et K_2, L_2 et N_2, traduire la relation

$$a(\varphi_{m_3} - \varphi_{k_3}) + b(\varphi_{n_1} - \varphi_{l_1}) = 0 \tag{27}$$

exprimant que la maille reste fermée tout en étant gauchie, ce que fait l'étoile indiquée. Ces considérations ont été appliquées à l'étude d'une tour carrée à deux étages, signalée au chapitre 9.

Remarque. — Il est clair également que la relation (27) peut être satisfaite par un montage utilisant, comme cela est courant, un transformateur; afin de limiter au strict minimum les types d'éléments électriques employés dans la construction des réseaux, nous avons préféré, même dans ce cas particulier, conserver l'usage des étoiles de conductances.

6. Structures à éléments compressibles en statique plane.

6.1. Dans l'étude précédente, le fait d'avoir négligé l'énergie de déformation longitudinale en regard de l'énergie de flexion et de torsion que chaque barre acquiert au cours de sa déformation a permis de traduire les déplacements des nœuds par les rotations globales des barres, coordonnées avantageuses surtout en statique plane où elles permettent l'élaboration d'un réseau intrinsèque pour chaque barre. Pour certaines structures, cette approximation n'est plus valable et l'énergie de compression (sinon celle de cisaillement, toujours négligée dans les exemples envisagés) peut être du même ordre de grandeur que l'énergie de flexion : il est alors indispensable de revenir aux coordonnées générales de déplacement des nœuds. Mais alors l'état de déformation simplifiée d'une barre est décrit par 6 coordonnées en statique plane et 12 coordonnées en statique tridimensionnelle; de plus, même en statique plane, le réseau représentatif d'une barre relié aux six nœuds électriques correspondants ne peut plus être invariant et dépend de l'orientation de la barre relativement aux axes. Cette complication fait que, excepté pour quelques structures particulières, l'analogie électrique est moins facilement utilisable dans la pratique pour les éléments compressibles. Il n'en demeure pas moins que l'exposé théorique de la méthode analogique, qui peut aussi bien être adapté à l'établissement d'un programme de calcul par un ordinateur électronique, présente un intérêt qui justifie sa présence ici; *on se bornera toutefois au cas de la statique plane.*

La possibilité d'extension ou de compression des barres supprime les relations de dépendance entre les coordonnées exprimant, indépen-

damment des forces appliquées, les déplacements des divers nœuds et, en conséquence, l'indétermination observée auparavant sur le système équivalent aux nœuds et sur les coefficients qui en traduisent l'effet énergétique. Le choix étant fait d'une formulation (φ_i) décrivant correctement la déformation simplifiée de la structure, celle-ci est traduite dans l'analogie par le seul réseau constitutif résultant de l'association des réseaux représentant le comportement de chaque élément dans cette formulation. Il suffit donc d'écrire l'énergie élastique emmagasinée par l'élément AB le plus général selon une forme quadratique des φ_i et d'appliquer la règle imposée au paragraphe 3.1.

6.2. La formulation naturelle en statique plane comprend, à chaque nœud A, la rotation du nœud φ_{a_0} et les composantes de son déplacement $\delta\mathbf{A}$ rapporté à une longueur D de référence et projeté sur les vecteurs unitaires orthogonaux $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,

$$\varphi_{a_1} = \frac{\delta\mathbf{A}.\mathbf{u}_1}{\mathrm{D}}, \qquad \varphi_{a_2} = \frac{\delta\mathbf{A}.\mathbf{u}_2}{\mathrm{D}}.$$

Il est à noter que, dans cette formulation, *l'arc le plus quelconque* ne se distingue de l'élément droit compressible que par les valeurs relatives de ses coefficients élastiques, l'un et l'autre étant décrits par une matrice de rang 6 et, dans l'analogie, par un réseau de

$$C_6^2 + 6 = 21 \text{ conductances.}$$

La littérature technique fournit les caractéristiques élastiques d'un élément AB, barre ou arc, en général à partir des rotations d'extrémités φ_a et φ_b, de la rotation globale φ_c, et de l'allongement relatif φ_d, s'exprimant dans la formulation valable pour l'étude de la structure selon

$$(28)\quad \begin{cases} \varphi_a = \varphi_{a_0}, \\ \varphi_b = \varphi_{b_0}, \\ \varphi_c = \dfrac{\mathbf{B}-\mathbf{A},\ \delta\mathbf{B}-\delta\mathbf{A},\ \mathbf{u}_3}{l^2} = \lambda\left[(\varphi_{b_2}-\varphi_{a_2})\cos\theta + (\varphi_{b_1}-\varphi_{a_1})\sin\theta\right], \\ \varphi_d = \dfrac{(\mathbf{B}-\mathbf{A}).(\delta\mathbf{B}-\delta\mathbf{A})}{l^2} = \lambda\left[(\varphi_{b_1}-\varphi_{a_1})\cos\theta + (\varphi_{b_2}-\varphi_{a_2})\sin\theta\right], \end{cases}$$

où l désigne la portée AB et λ le rapport $\dfrac{\mathrm{D}}{l}$, et avec

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \qquad \text{et} \qquad \theta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{B}-\mathbf{A}).$$

Les relations (28) permettent d'exprimer à partir des $\varphi_{a_0}, \ldots$, l'énergie élastique de l'élément, donnée en fonction des variables intrinsèques φ_a, φ_b, φ_c et φ_d. En particulier, pour un *élément droit compressible* on a, en ajoutant l'énergie de déformation longitudinale à l'expression connue pour un élément incompressible,

$$(29)\quad \mathrm{W} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{M}_{ab}(\varphi_a-\varphi_b)^2 - \mathrm{M}_{ac}(\varphi_a-\varphi_c)^2 - \mathrm{M}_{bc}(\varphi_b-\varphi_c)^2 + \mathrm{M}_{dd}\varphi_d^2\right].$$

En identifiant l'énergie élastique (29) écrite en fonction des φ_{a_0}, ... à la forme quadratique $\frac{M_{ij}\varphi_i\varphi_j}{2}$ et en tenant compte de la symétrie des M_{ij} on obtient le tableau des *coefficients élastiques*

$$
\left\{
\begin{aligned}
M_{a_0a_0} &= -M_{ab} - M_{ac},\\
M_{a_0a_1} &= \lambda \sin\theta M_{ac},\\
M_{a_0a_2} &= -\lambda\cos\theta M_{ac},\\
M_{a_0b_0} &= M_{ab},\\
M_{a_0b_1} &= -\lambda\sin\theta M_{ac},\\
M_{a_0b_2} &= \lambda\cos\theta M_{ac},\\
M_{a_1a_1} &= \lambda^2[-\sin^2\theta(M_{ac}+M_{bc})+\cos^2\theta M_{dd}],\\
M_{a_1a_2} &= \lambda^2\sin\theta\cos\theta(M_{ac}+M_{bc}+M_{dd}),\\
M_{a_1b_0} &= \lambda\sin\theta M_{bc},\\
M_{a_1b_1} &= \lambda^2[\sin^2\theta(M_{ac}+M_{bc})-\cos^2\theta M_{dd}],\\
M_{a_1b_2} &= -\lambda^2\sin\theta\cos\theta(M_{ac}+M_{bc}+M_{dd}),\\
M_{a_2a_2} &= \lambda^2[-\cos^2\theta(M_{ac}+M_{bc})+\sin^2\theta M_{dd}],\\
M_{a_2b_0} &= -\lambda\cos\theta M_{bc},\\
M_{a_1b_2} &= -\lambda^2\sin\theta\cos\theta(M_{ac}+M_{bc}+M_{dd}),\\
M_{a_2b_2} &= \lambda^2[\cos^2\theta(M_{ac}+M_{bc})-\sin^2\theta M_{dd}],\\
M_{b_0b_0} &= -M_{ab}-M_{bc},\\
M_{b_0b_1} &= -\lambda\sin\theta M_{bc},\\
M_{b_0b_2} &= \lambda\cos\theta M_{bc},\\
M_{b_1b_1} &= \lambda^2[-\sin^2\theta(M_{ac}+M_{bc})+\cos^2\theta M_{dd}],\\
M_{b_1b_2} &= \lambda^2\sin\theta\cos\theta(M_{ac}+M_{bc}+M_{dd}),\\
M_{b_2b_2} &= \lambda^2[-\cos^2\theta(M_{ac}+M_{bc})+\sin^2\theta M_{dd}],
\end{aligned}
\right. \qquad (30)
$$

Ce tableau de coefficients peut être utilisé successivement pour toutes les barres et permet la constitution systématique de la matrice repré-

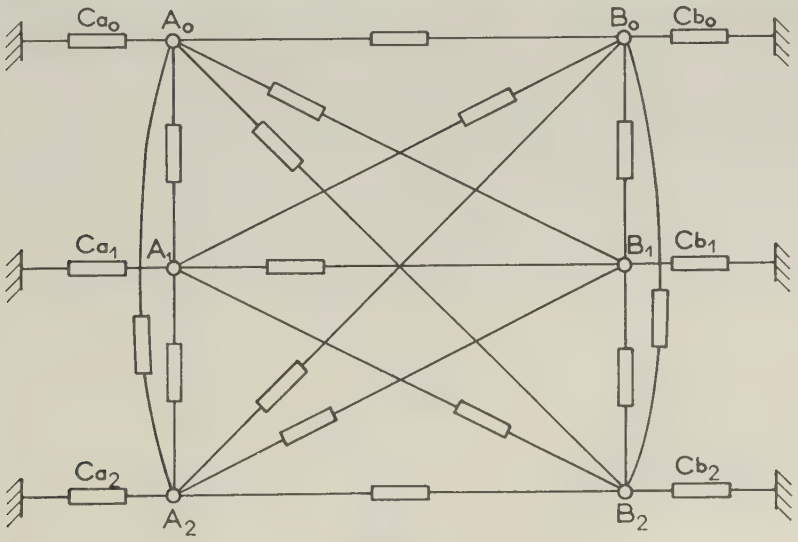

Fig. 7.

sentant la structure si l'on a en vue d'utiliser un ordinateur à la résolution du problème; on remarque qu'en l'absence de toute dépendance linéaire portant sur les variables de position choisies, les coefficients M_i qui traduisent le système équivalent aux nœuds sont parfaitement déterminés, et s'identifient alors aux variables de tension, en sorte que le problème proposé à la machine est un système ordinaire d'équations linéaires

$$M_i = M_{ij}\varphi_j.$$

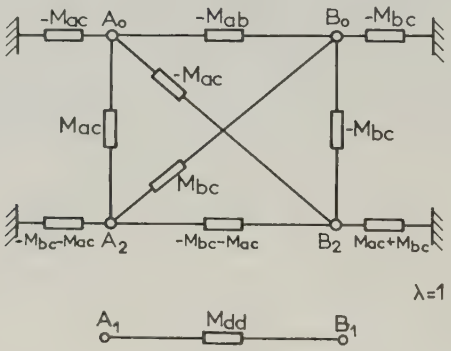

Fig. 8.

Mais on peut également développer le dispositif analogique en construisant pour chaque barre le réseau représenté à la figure 7. La somme des coefficients de chaque ligne ou colonne de la matrice des coefficients exprimés n'étant plus en général nulle, il faut introduire non seulement

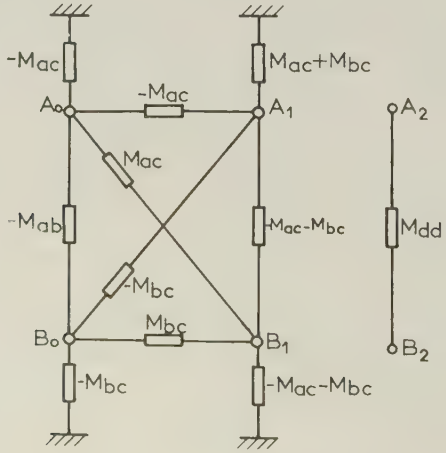

Fig. 9.

les conductances $C_{ij} = -M_{ij}$, mais les conductances de fuite $C_i = \sum_j M_{ij}$; les figures 8 et 9 montrent les simplifications rencontrées pour représenter les barres parallèles à $\mathbf{u}_1$ ou $\mathbf{u}_2$.

7. Arcs et éléments compressibles exceptionnels en statique plane.

7.1. La déformation simplifiée d'un élément AB dont la portée varie au cours de la déformation (arc ou barre droite compressible) comporte, comme on a vu, quatre paramètres. Si un tel élément se rencontre à *titre exceptionnel* dans une structure composée par ailleurs d'éléments droits incompressibles, il est avantageux de ne pas renoncer pour l'ensemble du système à la simplicité de la formulation étudiée au chapitre 4. Il suffira d'exprimer, par exemple, la déformation simplifiée de l'élément considéré au moyen des rotations φ_a, φ_b de ses extrémités et de deux paramètres équivalents à la donnée du déplacement relatif $\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{A}$ et dont la définition soit en accord avec la formulation du chapitre 4. On peut ainsi choisir les rotations globales φ_c, φ_d de deux barres rectilignes incompressibles fictives C et D articulées entre elles et dont les extrémités libres sont supposées suivre les nœuds A et B dans leurs translations. En sorte que si l'on décide, par exemple, que ces barres sont initialement à angle droit et d'égale longueur (*fig.* 10),

$$\delta B_x - \delta A_x = \frac{l\sqrt{2}}{2}(\varphi_d - \varphi_c),$$

$$\delta B_y - \delta A_y = \frac{l\sqrt{2}}{2}(\varphi_d + \varphi_c);$$

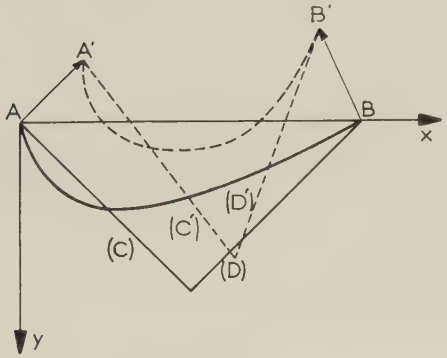

Fig. 10.

on peut alors écrire les éventuelles dépendances linéaires liant φ_d et φ_c aux rotations globales des autres éléments en suivant le processus indiqué au chapitre 4 et en remplaçant l'élément AB par les barres C et D pour définir les mailles dont il fait partie. L'énergie élastique

emmagasinée par l'élément peut s'exprimer selon une forme quadratique des variables φ_a, φ_b, φ_c et φ_d qui fournit les coefficients élastiques relatifs à cette formulation. La propriété (19), qui tient à l'homogénéité de la représentation choisie, reste valable pour l'élément exceptionnel, de sorte que l'arc ou la barre compressible les plus généraux sont traduits entièrement par $C_4^2 = 6$ coefficients ou par un réseau de six conductances.

7.2. L'exemple de formulation qui vient d'être proposé a l'avantage d'être applicable dans tous les cas et de fournir également pour l'élément un réseau *intrinsèque*, mais il est des cas où, pour simplifier ou réduire les dépendances linéaires entre les variables utilisées, il est préférable d'adapter la formulation au cas particulier étudié.

Ainsi pour la structure de la figure 11 *a* on peut repérer le comportement de l'arc AB à partir des rotations globales des barres verticales AH

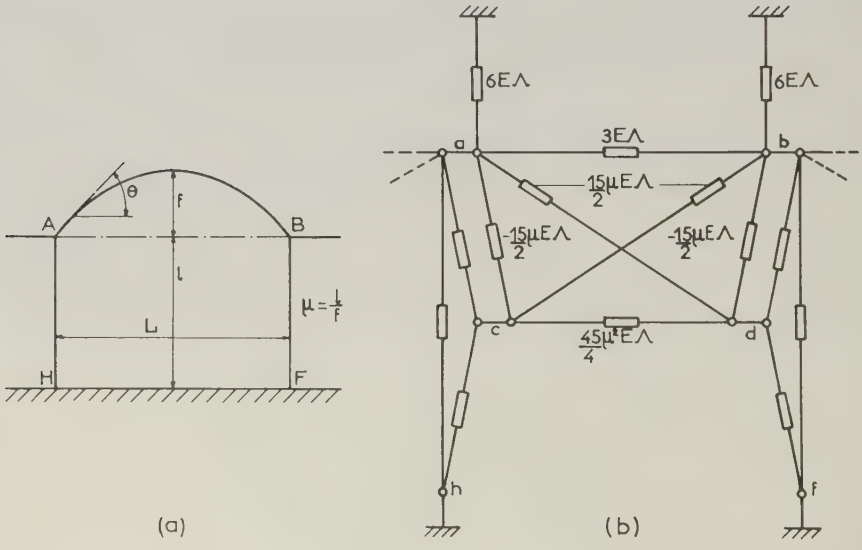

Fig. 11.

et BF déjà utilisées pour traduire le comportement de ces dernières. A titre d'exemple, la figure 11 *b* donne le réseau représentatif d'un arc parabolique de portée AB $= l$ et d'inertie réduite $J' = J \cos \theta$, constante sur toute la portée; la seule rigidité $\Lambda = \frac{J'}{l}$ suffit à caractériser les propriétés élastiques de cet arc particulier.

8. Structures d'éléments droits compressibles à nœuds articulés.

C'est un cas particulier important du problème envisagé au chapitre 6. Chaque élément est caractérisé par un seul coefficient four-

nissant l'expression de l'énergie de déformation longitudinale, seule à intervenir ici, en fonction de l'allongement relatif,

$$W = \frac{1}{2} M_{dd} \varphi_d^2. \tag{31}$$

Seuls importent les déplacements des nœuds de la structure, et la solution correspondante s'obtient à partir du cas général en supprimant les variables et les nœuds électriques relatifs aux rotations, et, dans l'expression de W, tous les termes exprimant l'énergie de flexion. Les variables qui subsistent étant indépendantes, tout est dit lorsqu'on a explicité le réseau constitutif d'une barre.

8.1. Structures planes.

Les coefficients et le réseau relatifs à un élément AB s'obtiennent immédiatement à partir des résultats (30) (*fig.* 12) :

$$\left\{\begin{array}{ll}
M_{a_1 a_1} = \lambda^2 M_{dd} \cos^2\theta, & M_{a_2 b_1} = -\lambda^2 M_{dd} \sin\theta\cos\theta;\\
M_{a_1 a_2} = \lambda^2 M_{dd} \cos\theta\sin\theta, & M_{a_2 b_2} = -\lambda^2 M_{dd} \sin^2\theta;\\
M_{a_1 b_1} = -\lambda^2 M_{dd} \cos^2\theta, & M_{b_1 b_1} = \lambda^2 M_{dd} \cos^2\theta;\\
M_{a_1 b_2} = -\lambda^2 M_{dd} \sin\theta\cos\theta, & M_{b_1 b_2} = \lambda^2 M_{dd} \sin\theta\cos\theta;\\
M_{a_2 a_2} = \lambda^2 M_{dd} \sin^2\theta, & M_{b_2 b_2} = \lambda^2 M_{dd} \sin^2\theta.
\end{array}\right. \tag{32}$$

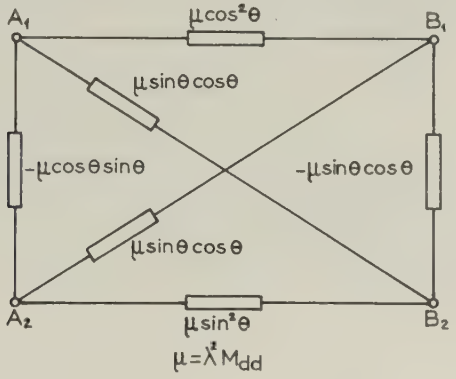

Fig. 12.

On vérifie que la propriété (19) valable pour le mode de représentation (φ_{l_i}) du chapitre 5 se retrouve ici : cela tient à l'homogénéisation des variables qui ne traduisent que les déplacements des nœuds. La propriété (19) traduit l'équilibre nécessaire de chaque barre et se retrouve évidemment dans le cas tridimensionnel. Comme au chapitre 5, les réseaux analogiques constitutifs ne comportent que les conductances $C_{l_i k_j} = -M_{l_i k_j}$ joignant les nœuds électriques L_i et K_j.

8.2. Structures tridimensionnelles.

La complexité du réseau relatif à une barre dans le cas général est naturellement plus grande, mais aucune complication théorique ne s'introduit et dans de nombreux cas particuliers on peut, par un choix d'axes de coordonnées convenable, simplifier énormément le réseau.

9. Technique de la réalisation analogique.

9.1. Choix des conductances et de la fréquence.

L'analogie précédemment exposée exige des conductances positives et négatives. On sait qu'une conductance négative peut être réalisée par un dispositif électronique qui reste, malgré les progrès de la technologie moderne, coûteux, encombrant, et ne peut donc convenir qu'à un emploi exceptionnel. Pour des raisons évidentes de simplicité on a donc préféré utiliser exclusivement des selfs et capacités qui, impédances imaginaires pures de signe opposé, se comportent comme des conductances réelles positives et négatives, au déphasage près du courant relativement à la tension. Les expériences effectuées constituent donc en même temps un test de la précision qu'on peut attendre de réseaux complexes de selfs et capacités beaucoup plus rarement utilisés que les réseaux de résistances.

Les deux principales difficultés à surmonter sont, d'une part les impédances parasites dues aux connections et à la réalisation pratique du réseau, d'autre part une surtension éventuellement insuffisante des selfs, lesquelles ne sont pas des impédances imaginaires aussi pures que les capacités. Cette dernière raison exige en particulier qu'on utilise un courant de fréquence assez élevée, mais on est limité dans ce remède par les impédances parasites de connection dont l'importance croît avec la fréquence. C'est donc selon un compromis qu'on a choisi la fréquence de 30 000 Hz et une gamme de conductances imaginaires correspondant aux capacités de 1000 à 10 000 pF et aux selfs de 28 à 2,8 mH. Celles-ci, réalisées avec des pots de ferrite convenant à cette fréquence et pourvues d'un noyau réglable permettant de les ajuster à $\pm$ 4 % de leur valeur moyenne, travaillant à faible niveau, atteignent des surtensions allant de 150 à 500. Les capacités peuvent, d'autre part, être obtenues dans le commerce facilement à la précision de 0,5 %. Elles sont soudées sur des éléments comportant des broches mâles et femelles permettant par empilement d'obtenir, à partir de valeurs rondes, n'importe quelle capacité de 0 à 10 000 pF. Ce choix permet de réaliser des réseaux très complexes sans exiger une grande puissance de l'oscillateur, d'autant que la tension d'entrée et les tensions rencontrées dans le réseau restent inférieures à 2 V afin de maintenir une bonne surtension des selfs; mais la stabilité en fréquence est essentielle et doit être obtenue au moyen

d'un pilotage par quartz. Bien que ces impédances soient réactives et non dissipatives, on conservera par la suite sans ambiguïté les termes de « dissipation » et « conductance » comme s'il s'agissait de résistances positives et négatives.

9.2. Mesure des conductances.

Trois claviers de 10 touches numérotées de 0 à 9 permettent, par mise en parallèle de capacités de 1000, 100 et 10 pF, d'obtenir une capacité étalonnée variant de 10 en 10 pF de 0 à 9 990 pF. La conductance à mesurer est insérée parallèlement à une branche d'un pont préalablement équilibré, constitué de quatre capacités de 10 000 pF (*fig.* 13).

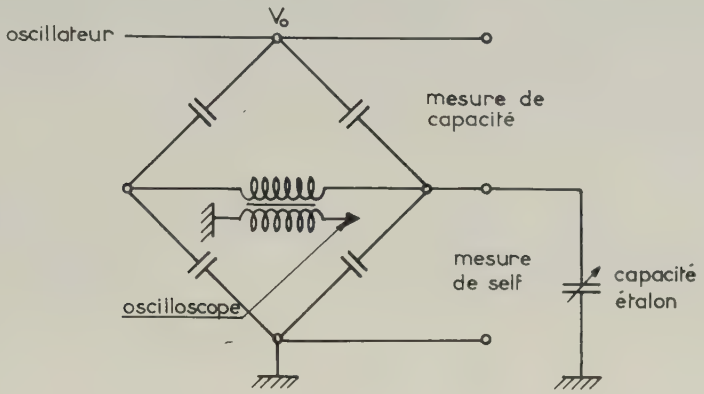

Fig. 13.

La mesure consiste à rééquilibrer le pont par la capacité variable étalon en insérant celle-ci parallèlement à la même branche s'il s'agit d'une self, à la branche opposée s'il s'agit d'une capacité. Cette méthode simple permet une mesure des conductances utilisées à mieux que 0,5 % près. L'ajustage d'un circuit oscillant à la fréquence utilisée par réglage du noyau de la self peut se faire directement sans la capacité étalon en insérant simultanément self et capacité en parallèle sur la même branche du pont. On a choisi pour unité de conductance positive une capacité de 10 pF et pour unité de conductance négative la self correspondante, les conductances utilisées ayant des valeurs dans ce code allant de 0 à 999.

9.3. Mesure des potentiels.

Elle se fait par comparaison avec un potentiel connu par sa valeur relative au potentiel d'alimentation, et obtenu par un pont (*fig.* 14) dont les deux branches sont la capacité variable C étalon d'une part, d'autre part la capacité $C_0 - C$ constituée par les capacités restantes, mises, elles aussi, en parallèle.

Ce pont étant branché comme l'indique le schéma, le potentiel obtenu à la jonction des deux branches est $V = V_0\left(\frac{C}{C_0}\right)$.

Normalement, la capacité C_0 constituée par l'ensemble des capacités étalonnées mises en jeu vaut 10 000 pF, soit 1000 dans le code choisi et V se lit alors sur le clavier en millièmes de V_0. La mesure des potentiels négatifs s'effectue en insérant en parallèle avec la branche connectée à la masse une self de conductance $-2C_0 = -2\,000$ en sorte que le potentiel obtenu vaut

$$V = V_0\left(\frac{C}{C_1}\right), \qquad \text{avec} \quad C_1 = C_0 - 2C_0 = -C_0.$$

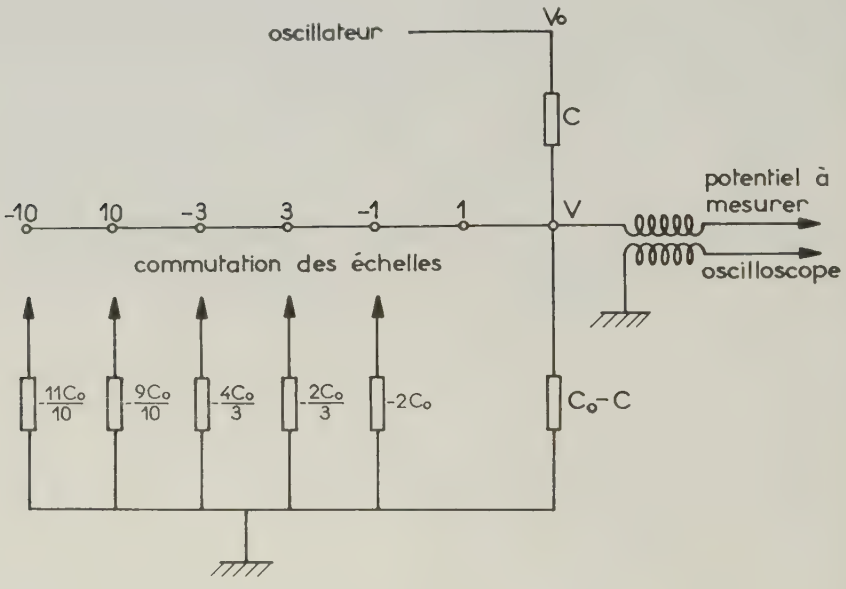

Fig. 14.

Enfin l'évaluation de potentiels en dehors de l'intervalle $(-V_0, +V_0)$ peut s'effectuer à l'aide d'échelles $(+3, -3)$ ou $(+10, -10)$ obtenues à l'aide de conductances adéquates insérées pareillement et transformant la somme des conductances des deux branches en $\frac{C_0}{3}, -\frac{C_0}{3}, +\frac{C_0}{10}, -\frac{C_0}{10}$. Seules toutefois les échelles $+1$ et -1 conviennent à une mesure précise, les autres échelles faisant apparaître un déphasage dont la correction entraîne une erreur qui peut être appréciable. Elles n'interviennent d'ailleurs que lors de l'évaluation initiale des intensités d'alimentation du réseau, choisies en sorte que les potentiels à mesurer restent dans l'intervalle $(-V_0, +V_0)$.

9.4. Alimentation du réseau.

C'est un des avantages du réseau à selfs et capacités d'échapper, comparativement aux réseaux de résistances passives ou aux bassins rhéoélectriques, à la fâcheuse nécessité du réglage par itération dans les problèmes d'injection d'intensités. Chaque potentiomètre est, en effet, remplacé ici par un circuit oscillant (C_1, $C_2 = -C_1$) (*fig.* 15) et la connection imposée par la conductance C_2 permet d'obtenir l'intensité

$$I = C_1 (V_0 - V) - C_2 V = C_1 V_0,$$

quel que soit le potentiel V. L'alimentation nécessite autant de circuits oscillants que d'intensités à injecter, mais elle est effectuée instantanément d'une façon correcte sans problème de convergence préalable.

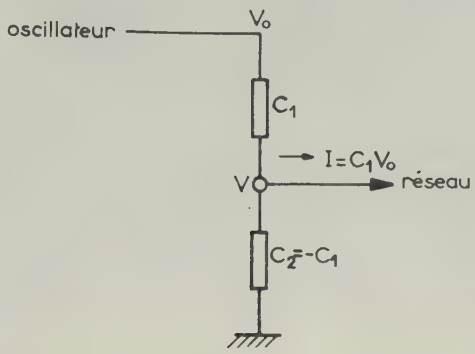

Fig. 15.

9.5. Choix des conductances intervenant dans l'alimentation et dans les étoiles de mailles.

Il y a un arbitraire dans le choix de l'échelle relative aux conductances du réseau constitutif. Cet arbitraire est levé, pour l'alimentation, en s'efforçant d'obtenir des tensions dans le réseau s'étalant au maximum dans l'intervalle ($-V_0$, $+V_0$) sans en sortir. Pour les étoiles de mailles, on fait en sorte que les tensions des nœuds de ces étoiles restent également dans cet intervalle, une résonance due à des conductances trop faibles enlevant toute précision dans la réalisation de la condition imposée par l'étoile correspondante; mais on évite aussi d'utiliser des conductances trop fortes qui abaissent proportionnellement le potentiel central, mais enlèvent cette fois de la précision dans la transmission des intensités par ces étoiles du fait que leur dissipation globale devient moins négligeable par rapport à celle du réseau constitutif.

9.6. Réalisations expérimentales.

1° Un seul coffret englobe l'oscillateur à quartz, la capacité variable étalon à trois claviers, le pont de mesure de conductances, un millivoltmètre permettant de se passer éventuellement d'oscilloscope, un déphaseur augmentant la précision et la facilité de mesure des potentiels légèrement déphasés. Un clavier commande les opérations : mesure de conductances ou de potentiels; un autre permet de choisir l'échelle pour cette dernière opération (*fig.* 16).

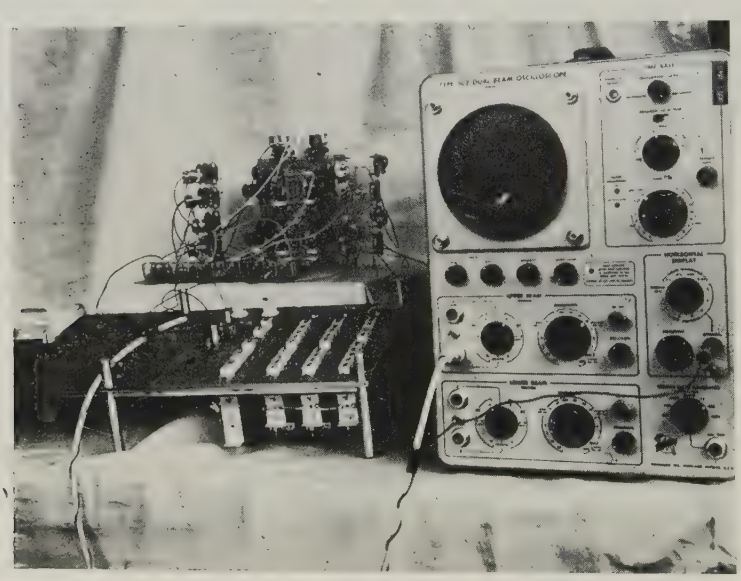

Fig. 16. — Vue du dispositif expérimental.

2° *Structures planes.* — La simplicité de l'analogie dans ce cas, chaque barre étant représentée par une barrette (*fig.* 17) supportant un triangle de conductances, a permis la construction d'un panneau spécialement conçu pour recevoir ces barrettes et constituer rapidement une très grande variété d'ossatures. Des lames de cuivre disposées à l'arrière du panneau et portées alternativement à la masse et au potentiel V_0 d'alimentation permettent de brancher les circuits oscillants d'alimentation directement, sans aucune connection, à l'aide des vis qui les fixent. A titre d'exemple, ont été réalisées les études d'un portique à trois étages (*fig.* 20, 21, 22, 23), d'une structure à mailles rectangulaires plus complexes correspondant à un profil de bloc creux de terre cuite (*fig.* 24, 25) nécessitant l'utilisation d'une étoile de maille. La précision obtenue a été nettement meilleure que 1 % relativement à la plus grande valeur.

3° *Structures tridimensionnelles.* — Un jeu de construction s'avérant plus délicat de réalisation même pour les structures trirectangulaires, on a construit une maquette représentant une tour carrée à deux étages

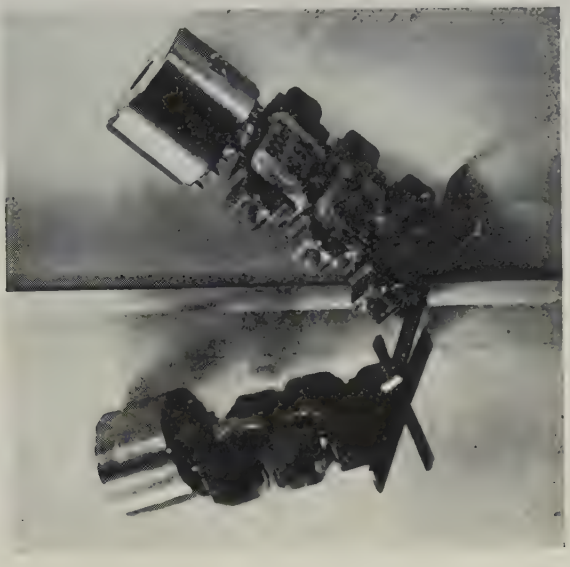

Fig. 17. — Vue d'une barrette.

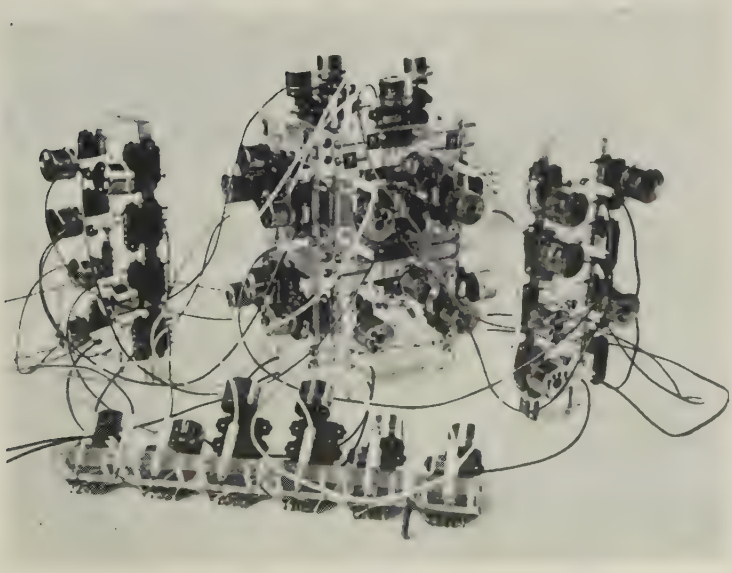

Fig. 18. — Vue du montage simulant une tour carrée.

dont l'étude avait été effectuée, pour une charge donnée, en conclusion d'une thèse de doctorat [7]. Chaque barre, parallèle à un axe de coordonnées, y est représentée par un réseau analogue à celui figuré au chapitre 5 et le réseau de transmission comporte, en plus des connections évidentes, quatre étoiles traduisant le gauchissement des faces verticales, montées sur deux plaquettes indépendantes (*fig.* 18). La matrice sous-jacente est de rang 32 et a été inversée par une calculatrice électronique aux fins de vérification. Les calculs effectués dans la thèse déjà signalée et les résultats correspondants à des charges diverses que fournit directement la matrice inverse, qui peuvent être qualifiés d'exacts étant donné la précision supérieure au 1/1000, sont approchés par les résultats fournis par l'analogie à mieux que 1 %, ce qui constitue un réel encouragement à l'utilisation de réseaux complexes de selfs et de capacités.

9.7. Exemple détaillé : Portique (*fig.* 19).

Il s'agit de l'étude d'un portique à trois étages subissant en plus des charges verticales imposées aux trois étages un effort latéral réparti sur toute la hauteur (*fig.* 20).

Les couples du système équivalent aux nœuds (*fig.* 21) obtenus par la formule classique $M = \frac{pl^2}{12}$ sont exprimés en tonnes-mètres.

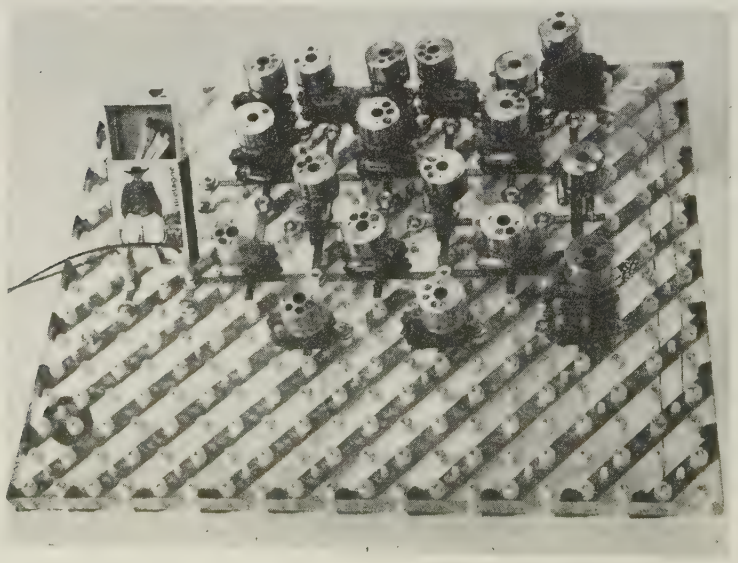

Fig. 19. — Vue du montage simulant un portique à trois étages.

Réseau constitutif : On suppose que toutes les poutres sont incompressibles, de section uniforme, et ont même rigidité Λ en sorte que le réseau constitutif sera constitué de neuf triangles de conductances, identiques,

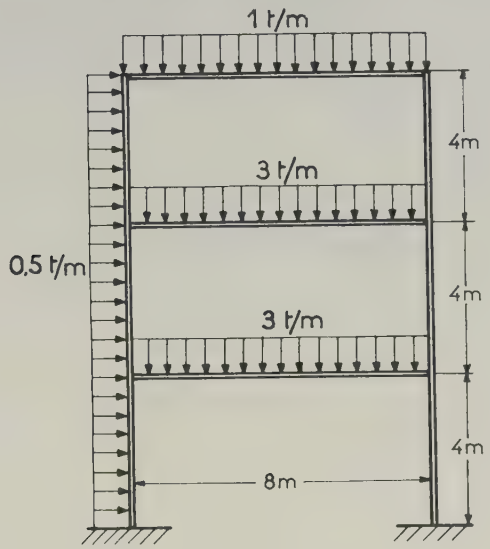

Fig. 20.

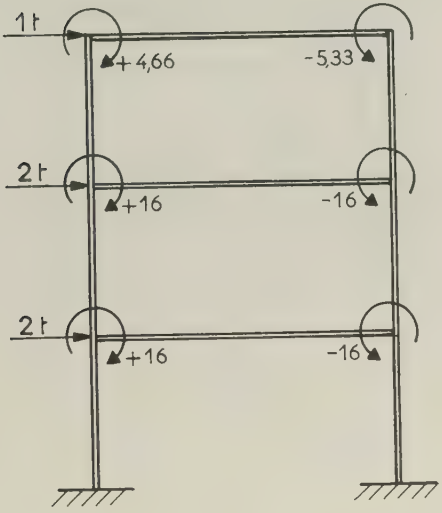

Fig. 21.

avec la correspondance choisie raisonnablement, *coefficient élastique* $2\,E\Lambda \leftrightarrow$ *conductance* $C = +100$. La correspondance, rotation $\leftrightarrow$ potentiel n'a pas lieu d'être explicitée ici, non plus que la rigidité commune des barres.

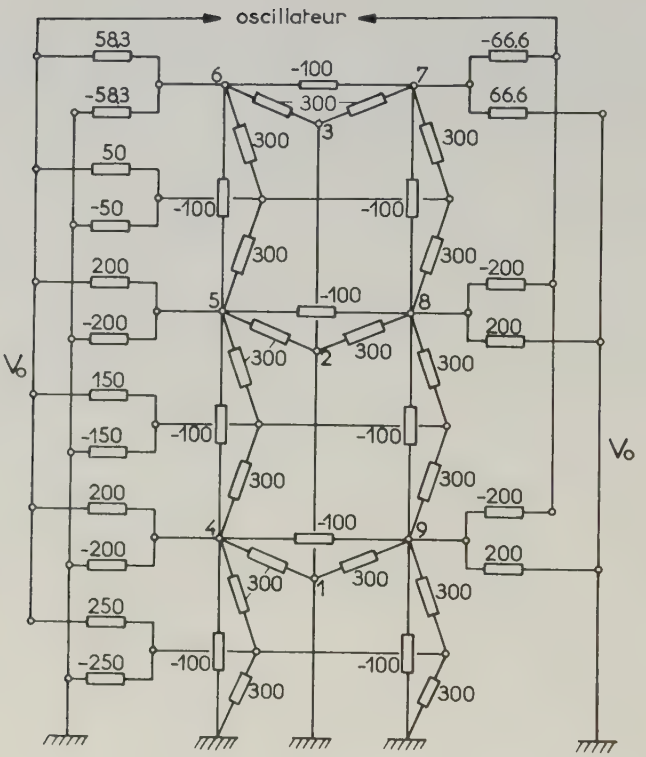
oscillateur
583
-583
50
-50
200
-200
150
-150
200
-200
250
-250
-66.6
66.6
-200
200
-200
200
-200
200
-100
300
Vo
Vo
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 22.

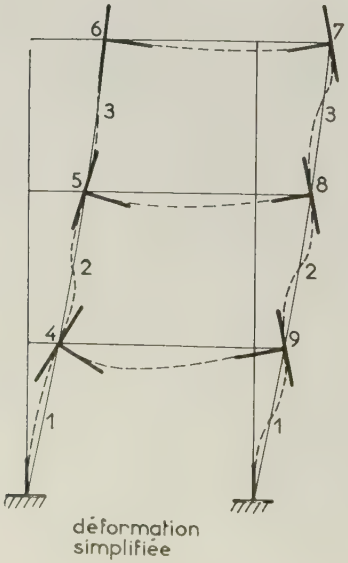
déformation
simplifiée
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 23.

Réseau de transmission : Il se réduit ici à connecter les nœuds de rotation globale des barres horizontales à la masse et ceux des barres verticales de chaque étage entre eux.

Alimentation : Pour obtenir des potentiels raisonnables, on a retenu la correspondance

$$\textit{couple}\quad M = 20\,t.m \quad\leftrightarrow\quad \textit{Intensité}\ I = 250,$$

en sorte que l'unité d'intensité représente un couple de 0,08 t.m. En plus des couples. seules les forces horizontales travaillent et ont à être traduites dans l'analogie. L'énergie élastique qu'elles communiquent à la structure au cours d'une déformation élémentaire s'exprime à partir des rotations globales des barres verticales, selon

$$dW = B_1\, d\varphi_1 + B_2\, d\varphi_2 + B_3\, d\varphi_3,$$

où B_1, B_2, B_3 valent respectivement 20, 12, 4 t.m et sont donc traduits dans l'analogie par les intensités

$$I_1 = 250, \qquad I_2 = 150, \qquad I_3 = 50.$$

Résultats : Les résultats fournis par l'analogie sont comparés à ceux obtenus par la méthode de Cross, ramenés à l'échelle convenable, qui peuvent être considérés comme exacts à 1/1000 près.

Rotations.	φ_1.	φ_2.	φ_3.	φ_4.	φ_5.	φ_6.	φ_7.	φ_8.	φ_9.
Cross.....	344,6	345,3	147,8	609,7	477,2	151,1	−56,9	−146,0	−65,8
Analogie $\left(\text{en } \frac{V_0}{1000}\right)$..	344	345	149	607	478	150	−58	−143	−65

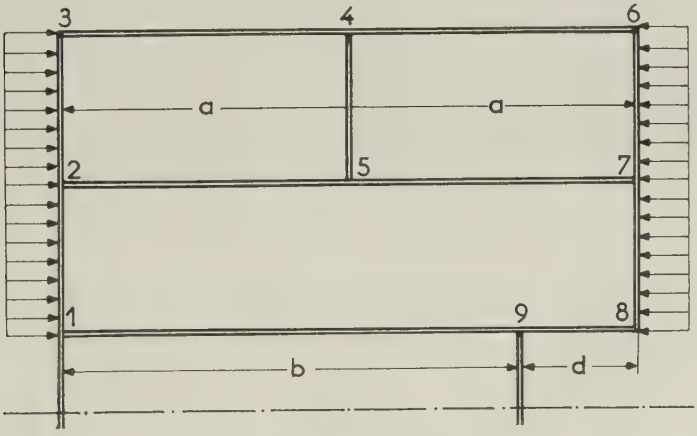

Fig. 24.

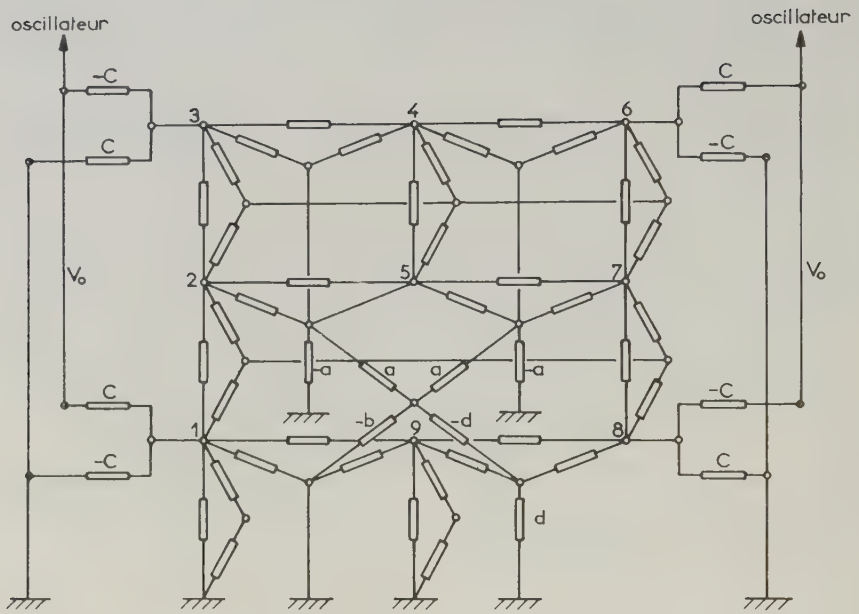

Fig. 25.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Kron, *Tensorial analysis and equivalent circuits of elastic structures* (1) (*J. Frankl. Inst.*, t. 238, n° 6, 1944, p. 399-452).

[2] F. L. Ryder, *The analysis of linear and non linear framed structures* (*Thesis*, New York University, December 1950) (2).

[3] F. L. Ryder, *Electrical analogs of statically loaded structures* (*Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, t. 119, 1954, p. 1046).

[4] J. Goethals, *Calcul analogique de structures hyperstatiques et application au calcul des tuyauteries en expansion thermique* (*Ann. Assoc. Intern. pour le Calcul analogique*, t. 1, n° 2, 1958, p. 64-74.

[5] A. Rojas-Lagarde et J. Sanguinetti, *Resolución de sistemas hiperestáticos mediante mediciones en circuitos eléctricos* (*Revista Electrotécnica*, Buenos-Aires, octobre 1958, p. 389-392).

[6] F. L. Ryder, *Application of electrical analogs of static structures* (*J. Eng. Mech. Division, Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, t. 85, EM 1, 1959).

[7] E. Absi, *Contribution à l'étude de systèmes hyperstatiques de haut degré* (*Thèse*, Paris, 1961; *Cahiers Rech. Th. Exp. Matériaux et Structures*, t. 15, Eyrolles, 1963).

(1) Cet article met en évidence la matrice relative à une poutre quelconque dans la formulation générale utilisée au chapitre 6 et fournit la façon, adoptée dans l'étude présente, de construire le réseau associé à partir de selfs et de capacités.

(2) Cette thèse ainsi que les publications ultérieures ([3] et [6]) signalent la possibilité de représenter une poutre droite de section constante par un triangle d'impédances en utilisant la notion de rotation globale, tout en utilisant expérimentalement des transformateurs associés à des résistances en lieu et place d'inductances et de capacités.

[8] P. Alais et R. Siestrunck, *Sur la résolution analogique des assemblages continus plans de pièces droites* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1104-1106).

[9] P. Alais, *Sur la description analogique d'une classe de systèmes physiques et son application au calcul des ossatures hyperstatiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 409-411).

[10] L. Malavard et L. Gyergyek, *Calculateur analogique à éléments réactifs pour la résolution automatique des systèmes d'équations algébriques linéaires* (*Actes des 3e Journées Internationales de Calcul analogique*, Presses académiques européennes, Bruxelles, 1962, p. 46-51).

(Manuscrit reçu le 1er avril 1963.)

Journal de Mécanique,
Vol. 3, N° 1, Mars 1964.

Simulation du comportement dynamique de structures au moyen de réseaux de selfs et capacités

par

Pierre ALAIS*,
Département de Mécanique, Université de Paris.

1. Introduction.

L'étude de structures soumises sous l'effet de charges statiques ou d'efforts oscillants à de faibles déformations ou vibrations, relevant donc de la théorie linéaire de la Résistance des Matériaux, est une des applications immédiates du calcul matriciel [1].

Dans ce formalisme, la déformation statique peut être présentée comme un cas particulier de l'ensemble des régimes de vibration stationnaire harmonique obtenus en appliquant des efforts oscillant harmoniquement en phase, d'amplitude égale aux efforts statiques envisagés et de pulsation arbitraire ω. Aussi est-il naturel que le premier article [2] consacré à l'étude de structures au moyen d'analogies électriques à partir du formalisme matriciel ait proposé une extension au cas dynamique de la méthode énoncée pour l'étude statique en doublant le réseau qui traduit les propriétés élastiques de la structure d'un réseau identique, lequel figure son inertie, dont les conductances doivent être choisies proportionnelles au carré ω^2 de la pulsation envisagée.

Le procédé ne semble pas avoir eu de développements substantiels en raison de la mauvaise précision obtenue avec la technologie employée [3]. Encore faut-il remarquer que la théorie avancée, exacte dans le cas statique, n'est plus qu'approchée pour les régimes oscillatoires et valable seulement pour les fréquences faibles devant la

* Assistant à la Faculté des Sciences de Paris.

première fréquence propre de chacun des éléments de la structure envisagée : les coefficients de la matrice représentative de la structure ne dépendent pas linéairement de ω^2, comme nous le verrons plus loin, sauf approximativement pour les fréquences citées.

Assez curieusement, il n'y a pas eu depuis, tout au moins à notre connaissance, d'autres tentatives pour calquer dans une analogie électrique la méthode matricielle relative aux régimes de vibrations, et la plupart des auteurs s'intéressant aux analogies électriques d'éléments élastiques en vibration, plutôt que d'en représenter analogiquement la matrice globale calculée au préalable, se sont efforcés d'étudier par analogie le comportement détaillé d'un élément, c'est-à-dire de résoudre analogiquement les équations aux dérivées partielles qui dérivent de la dynamique de ce dernier. Si, dans cette optique, on renonce à une analogie véritablement dynamique et se restreint à envisager la réponse stationnaire à une attaque oscillante harmonique de pulsation ω, on peut, en substituant $j\omega$ à l'opérateur de dérivation par rapport au temps $\frac{\partial}{\partial t}$, se ramener à l'étude d'un système différentiel soluble par une méthode aux différences finies directement transposable dans l'analogie, mais exigeant toujours de par la nature du problème, des impédances de signe contraire soit par exemple des selfs et des capacités [4]. Les réseaux obtenus dépendent malheureusement de la fréquence envisagée et ne représentent pas intrinsèquement l'élément élastique considéré, aussi une amélioration substantielle ([5], [6]) consiste tout en continuant d'exprimer les dérivées spatiales par des différences finies, à restituer son caractère dynamique à l'analogie et à traduire l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ comme dans les classiques analogies électromécaniques par des selfs et des capacités avec la difficulté toutefois que faute de capacités ou d'inductances négatives, il faut utiliser des transformateurs aussi parfaits que possible et donc coûteux. On a ainsi un réseau intrinsèquement attaché à la poutre indépendamment de l'attaque envisagée qui permet même de résoudre les problèmes transitoires. Enfin, le fractionnement formel à partir des équations aux dérivées partielles écrites peut être préférablement effectué sur la poutre elle-même, ce qui conduit à décrire son comportement en supposant que la masse est concentrée au niveau des coupes effectuées; les qualités élastiques de chaque tronçon sont alors traduites par des relations linéaires entre les variables décrivant l'évolution des coupes qui le limitent [8]. Le procédé employé avec la technologie précédemment éprouvée [7] a fourni la plus grande précision de calcul dans certains cas précis [9].

Toutefois, l'intérêt évident de ces méthodes pour l'étude d'un élément complexe comme une aile d'avion par exemple, tombe assez rapidement pour les structures à éléments nombreux en raison de l'importance du

matériel qu'il faudrait alors utiliser. Pour de telles structures, dans la mesure où les éléments qui les constituent ont des caractéristiques dynamiques connues ou faciles à déterminer par le calcul ordinaire, il est essentiel de réaliser le réseau le plus simple possible et de revenir au formalisme matriciel. La présente étude est le prolongement naturel de l'analogie déjà présentée pour la Statique ([11], [12], [13]), et éprouvée expérimentalement. Dans de nombreux cas, la simplicité du réseau peut racheter largement l'inconvénient qu'il y a d'être dans l'obligation d'utiliser des impédances fonction de la fréquence d'attaque : on le verra dans l'étude proposée à titre d'exemple d'une poutre échelle Virendeel.

2. Si, excluant les phénomènes transitoires, on admet que le régime périodique de vibration d'une structure soumise à des efforts statiques et dynamiques de diverses pulsations et phases dépend linéairement de ces efforts, le problème fondamental de dynamique de la structure est l'étude de sa réponse stationnaire à un système d'efforts E de même pulsation et même phase; la vibration observée étant alors harmonique en phase avec les efforts E, les déplacements, rotations et translations des divers nœuds A de la structure sont caractérisés par leurs seules amplitudes φ_i et $\partial\mathbf{A}$, déterminées, relativement à un système de coordonnées adéquat, par n variables de position φ_i. Leur ensemble constitue la *vibration simplifiée* de la structure dont la connaissance ramène le problème à une étude séparée du comportement de chaque élément un par un. Comme nous l'avons fait dans la résolution des problèmes de statique des structures [13], nous nous proposons ici de déterminer la vibration simplifiée en évitant d'écrire le système d'équations linéaires auquel conduisent les calculs classiques, soit par une transcription analogique directe de la structure en un réseau électrique dont les potentiels Φ_i des nœuds i fournissent la solution cherchée, soit par une écriture automatique de la matrice adaptée au calcul par ordinateur.

Pour les mêmes raisons qu'en Statique, il est avantageux de substituer aux efforts E appliqués aux points les plus divers de la structure un système d'efforts F appliqués exclusivement aux nœuds de la structure équivalent du point de vue adopté, dans la mesure où il provoque la même vibration simplifiée. L'existence d'un tel système ne repose que sur la dépendance linéaire admise de la vibration de la structure par rapport aux efforts qui la créent. En effet, reprenant le raisonnement déjà effectué pour l'étude statique, on peut maintenir dans leur position de repos les nœuds de la structure subissant l'attaque oscillante E au moyen d'efforts f de blocage aisément calculables à partir du comportement de chaque barre supposée encastrée à ses deux extrémités. L'annulation du blocage des nœuds obtenue par superposition des efforts F directement opposés aux f fait passer d'un mode à vibration simplifiée nulle à la vibration provoquée par les efforts E. Les modes

vibratoires obtenus par l'application des efforts E ou des efforts F, sans s'identifier dans le comportement des éléments de la structure attaqués par les efforts E ailleurs qu'à leurs extrémités, ont cependant la même vibration simplifiée, en vertu de la linéarité admise. La considération des efforts F, au lieu et place des efforts E, permet de localiser les échanges d'énergie entre la structure et le système extérieur au niveau des nœuds et de les traduire simplement, à l'aide des variables de position constituant la vibration simplifiée.

L'énergie associée au problème est celle absorbée par la structure évoluant de la déformation nulle à la déformation extrême pendant le premier quart de la période de vibration. Mais elle est emmagasinée par la structure non seulement sous forme élastique, mais sous forme cinétique et le bilan énergétique pendant le temps considéré s'écrit :

Énergie fournie par les forces extérieures = Énergie élastique emmagasinée à la déformation extrême

— Énergie cinétique de la structure au temps initial de passage par la déformation nulle.

Le bilan, pour un élément de la structure attaqué à ses extrémités exclusivement, s'écrit nécessairement selon une forme quadratique des φ_i intéressant cet élément

$$W = \frac{1}{2} M_{ij} \varphi_i \varphi_j ; \tag{1}$$

les M_{ij} formant une matrice symétrique, sont les coefficients dynamiques de cet élément relatifs à la représentation (φ_i) choisie. Le bilan énergétique de la structure entière est la somme de ceux de tous ses éléments et s'écrit de même selon une forme quadratique (1) reposant sur l'ensemble de la vibration simplifiée (φ_i).

La donnée du système des efforts extérieurs F est fournie par la variation élémentaire du bilan W associé à une variation élémentaire du régime de vibration

$$dW = \mathfrak{M}_i \, d\varphi_i , \tag{2}$$

les $\mathfrak{M}_i$ apparaissant comme les composantes généralisées des amplitudes des efforts F dans la représentation (φ_i) choisie.

Si aucune hypothèse particulière n'est faite qui restreigne l'indépendance des variables φ_i, le problème est correctement posé par les données (1) et (2), les $\mathfrak{M}_i$ s'identifiant aux variables de tension associées aux variables de position φ_i, et se réduit à la résolution du système

$$M_{ij} \varphi_j = \mathfrak{M}_i . \tag{3}$$

Toutefois on néglige souvent les déformations longitudinales des éléments droits en regard des autres déformations, considérant que la vibration

s'effectue ainsi à longueur constante pour ces éléments. Une telle hypothèse, tout en simplifiant l'expression du bilan énergétique de ces éléments et réduisant le nombre de leurs coefficients dynamiques, introduit des dépendances linéaires homogènes entre les variables φ_i de la représentation choisie

$$\alpha_{si}\varphi_i = 0 \qquad (s = 1, \ldots, p) \tag{4}$$

dont il faut tenir compte en plus des données (1) et (2).

On sait, à partir des considérations générales effectuées au début de l'étude statique [13], qu'une transcription analogique est possible dans les deux cas, la traduction des éventuelles relations (4) devant se faire par un réseau de transmission non dissipatif superposé au réseau constitutif dont la dissipation s'identifie dans l'analogie au bilan (1). Les composantes généralisées $\mathfrak{M}_i$ des efforts extérieurs ont pour analogues les intensités alimentant les nœuds I du réseau électrique. L'éventuelle indétermination des $\mathfrak{M}_i$ et de l'alimentation correspondante, provoquée par l'existence de relations (4), est supprimée au niveau du réseau constitutif par le réseau de transmission assurant, quelle que soit la collection $(\mathfrak{M}_i)$ retenue, le régime de potentiels correspondant à la solution unique. A seule fin de réduire l'exposé, on se limitera au cas des structures planes, l'étude des structures tridimensionnelles ne présentant aucune difficulté théorique supplémentaire.

3. Formulation adaptée à l'étude dynamique de la structure plane la plus générale.

3.1. L'étude dynamique d'un élément AB, barre ou arc, de section uniforme ou non, attaqué à ses extrémités seules, est en général effectuée relativement au système Axy, Ax coïncidant avec la droite AB (*fig.* 1). Si l'on n'effectue aucune hypothèse particulière sur le comportement élastique de cet élément, six variables indépendantes décrivent sa vibration simplifiée, à savoir : les amplitudes φ_a et φ_b des rotations des extrémités A et B et celles de leurs déplacements, rapportés à la longueur $l = \mathrm{AB}$, parallèlement à Ax et Ay :

$$\begin{cases} \varphi_{a_x} = \frac{1}{l}\,\delta\,\mathbf{A}.\mathbf{u}_x, & \varphi_{a_y} = \frac{1}{l}\,\delta\,\mathbf{A}.\mathbf{u}_y, \\ \varphi_{b_x} = \frac{1}{l}\,\delta\,\mathbf{B}.\mathbf{u}_x, & \varphi_{b_y} = \frac{1}{l}\,\delta\,\mathbf{B}.\mathbf{u}_y, \end{cases} \tag{5}$$

soit $\varphi_g \quad (g = a, b, a_x, b_x, a_y, b_y)$.

Les efforts oscillatoires exercés aux extrémités A et B, d'amplitude $(\mathbf{F}_A, \mathrm{M}_A)$ et $(\mathbf{F}_B, \mathrm{M}_B)$ s'expriment sans ambiguïté à partir de la vibration

simplifiée qu'ils créent. Ils dépendent linéairement des variables φ_g et s'identifient aux moments généralisés M_g qui leur sont associés selon

$$(6)\qquad \begin{cases} M_a = M_A, & M_b = M_B, \\ M_{a_x} = \mathbf{F}_A . l\,\mathbf{u}_x, & M_{b_x} = \mathbf{F}_B . l\,\mathbf{u}_x, \\ M_{a_y} = \mathbf{F}_A . l\,\mathbf{u}_y, & M_{B_y} = \mathbf{F}_B . l\,\mathbf{u}_y. \end{cases}$$

Les coefficients dynamiques de l'élément AB dans la représentation sont fournis par les relations connues

$$(7)\qquad M_g = M_{gk}\varphi_k,$$

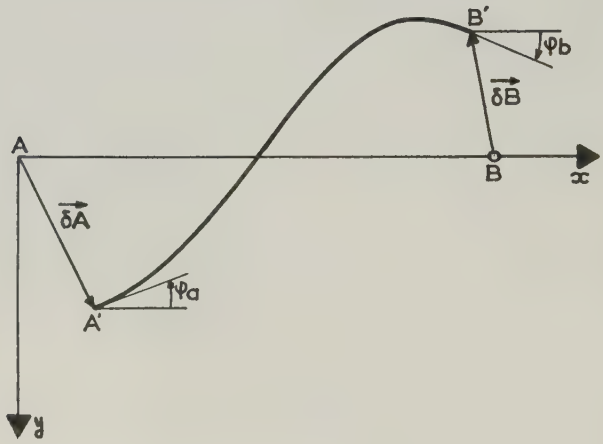

Fig. 1.

et l'énergie absorbée par l'élément pendant le premier quart de période s'écrit

$$(8)\qquad W = \frac{1}{2} M_{gk}\varphi_g\varphi_k,$$

Les M_{gk} qui constituent une matrice symétrique et décrivent le comportement vibratoire de l'élément AB relativement au système privilégié Axy seront dits coefficients intrinsèques de cet élément.

3.2. La vibration simplifiée d'une structure est décrite relativement à un système cartésien convenable $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Les variables intéressant l'élément AB sont les amplitudes φ_{a_0} et φ_{b_0} des rotations des sommets A et B et les amplitudes de leurs déplacements rapportés à une longueur caractéristique L parallèlement à $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, soit $\frac{1}{L}\delta\mathbf{A}.\mathbf{u}_1$, ...

La vibration d'une structure à s sommets est ainsi décrite par $n = 3s$ paramètres $(i = a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

En ce qui concerne l'élément AB, on passe des variables ($i = a_0$, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) aux variables privilégiées φ_g pour cet élément ($g = a$, a_x, a_y, b, b_x et b_y) par la matrice de transformation évidente :

$$(9)\quad \varphi_g = A_{gi}\varphi_i, \qquad A_{gi} = \left\{\begin{array}{c|cccccc} & a_0. & a_1. & a_2. & b_0. & b_1. & b_2. \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_x & 0 & \alpha\cos\theta & \alpha\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ a_y & 0 & -\alpha\sin\theta & \alpha\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_x & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\cos\theta & \alpha\sin\theta \\ b_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\sin\theta & \alpha\cos\theta \end{array}\right.$$

où α est le quotient $\frac{L}{l_{AB}}$ et θ l'angle caractérisant l'orientation de l'élément : $\theta = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_x)$; l'énergie associée à la vibration de l'élément AB :

$$(10)\quad W = \frac{1}{2} M_{gk}\varphi_g\varphi_k = \frac{1}{2} M_{ij}\varphi_i\varphi_j$$

s'exprime dans la nouvelle représentation par les coefficients dynamiques M_{ij} calculés à partir des coefficients intrinsèques par les relations

$$(11)\quad M_{ij} = M_{gk}A_{gi}A_{kj}.$$

Le réseau analogique représentatif de l'élément AB est construit sur les six nœuds électriques associés aux six variables décrivant sa vibration simplifiée, en joignant les nœuds i et j par les conductances $C_{ij} = -M_{ij}$ et le nœud i à la masse par la conductance

$$C_i = \sum_j M_{ij} \qquad (j = a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2).$$

Les mêmes règles valent pour la construction du réseau représentatif de la structure entière sur les $n = 3s$ nœuds électriques correspondant à la totalité des variables φ_i mises en jeu ($i = a_0, a_1, a_2, \ldots, s_0, s_1, s_2$).

Si aucune hypothèse particulière n'a été effectuée sur le comportement élastique des éléments de façon à n'introduire aucune dépendance linéaire entre les φ_i, le système équivalent aux nœuds s'exprime sans ambiguïté par la relation

$$dW = M_i\, d\varphi_i,$$

où les M_i s'identifient aux variables de tension associées aux φ_i. L'injection des intensités I_i, I_j, ... aux divers nœuds i, j permet d'obtenir la solution, qui s'identifie aux potentiels atteints par ces nœuds.

4. Éléments incompressibles longitudinalement.

Pour un élément droit AB justifiant l'hypothèse d'incompressibilité longitudinale, les variables φ_{a_x} et φ_{b_x} de la représentation privilégiée se confondent en une variable φ_c décrivant la vibration longitudinale

globale de l'élément AB. Les relations (7) et (8) restent valables pour la collection $g = a, b, a_y, b_y, c$, étant admis que

$$(12) \qquad M_c = \ell X, \qquad X = (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B).\mathbf{u}_x,$$

les composantes longitudinales des efforts $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$ restant indéterminées. La vibration longitudinale, entièrement découplée de la vibration transversale, est déterminée à partir de la masse totale M de l'élément et des éventuelles charges statiques qu'il supporte; la force d'inertie, le moment généralisé, l'énergie et l'unique coefficient associés à cette vibration sont respectivement

$$(13) \qquad \begin{cases} X = -M\omega^2 \ell \varphi_c, & M_c = -M\omega^2 \ell^2 \varphi_c, \\ W = -\frac{1}{2} M\omega^2 \ell^2 \varphi_c^2 = \frac{1}{2} M_{cc} \varphi_c^2, & M_{cc} = -M\omega^2 \ell^2. \end{cases}$$

On peut remarquer qu'il ne serait pas aussi avantageux que dans l'étude statique d'utiliser la notion de rotation globale pour de tels éléments, l'énergie cinétique ne pouvant être traduite qu'à partir des déplacements absolus des nœuds.

Le passage aux coefficients dynamiques relatifs à la représentation générale adoptée pour la structure s'effectue toujours selon les relations (11) en supprimant dans la matrice (9) l'une des lignes associées aux indices a_x et b_x et en affectant celle qui reste à l'indice c. Mais la traduction analogique de ces coefficients par le réseau constitutif est insuffisante, les variables traduisant les déplacements des nœuds A et B que relie l'élément n'étant plus indépendantes et liées par la relation

$$(14) \qquad (\delta\mathbf{B} - \delta\mathbf{A}).(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = 0,$$

soit

$$(\varphi_{b_1} - \varphi_{a_1}) \cos\theta + (\varphi_{b_2} - \varphi_{a_2}) \sin\theta = 0.$$

Cette relation doit être imposée, soit par un transformateur non dissipatif de rapport $\operatorname{tg}\theta$, soit par le circuit non dissipatif, construit selon les règles déjà exposées dans l'étude statique, de la figure 2, les conductances n'étant imposées qu'à un facteur près.

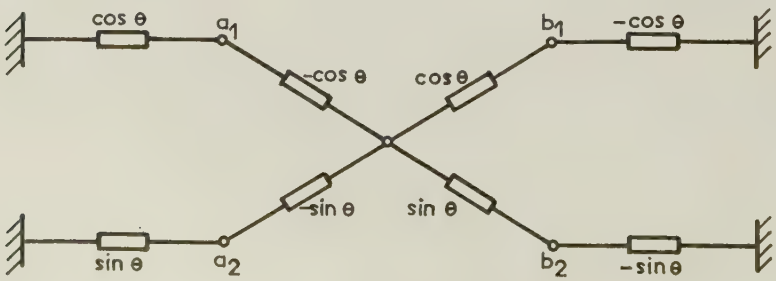

Fig. 2.

La présence de tels éléments dans la structure crée une indétermination dans la formulation (2) ainsi que dans l'alimentation correspondante du réseau, l'ensemble des circuits de transmission associés aux relations (14) assurant cependant l'unicité de la solution.

5. Coefficients dynamiques d'un élément droit, de section uniforme, libre de toute charge, incompressible longitudinalement.

La vibration longitudinale est découplée de la vibration transversale et traduite par les relations (13). La déformée transversale $y(x)$ vérifie l'équation classique de vibration

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{15}$$

où ρ, E sont la masse spécifique et le module d'élasticité du matériau constituant la poutre, S la section transversale de cette dernière et I le moment d'inertie de celle-ci par rapport à l'axe principal perpendiculaire au plan de flexion. L'équation des vibrations harmoniques de pulsation ω s'écrit

$$y - \frac{EI}{\rho S \omega^2} y^{IV} = 0, \tag{16}$$

et sa solution générale s'exprime en sinus et cosinus hyperboliques et circulaires de la variable adimensionnelle

$$\lambda = l\left(\frac{\rho S \omega^2}{EI}\right)^{\frac{1}{4}},$$

l étant toujours la longueur de l'élément considéré.

Elle est déterminée à partir des conditions imposées aux extrémités

$$\begin{aligned} y(0) &= l\varphi_{a_y}, & y(l) &= l\varphi_{b_y}; \\ y'(0) &= \varphi_a, & y'(l) &= \varphi_b. \end{aligned}$$

Les moments généralisés s'expriment à partir du moment $M(x) = -EIy$ et de l'effort tranchant $T(x) = EIy$ des efforts de gauche au niveau des extrémités

$$\begin{cases} M_a = M(0), & M_b = M(l), \\ M_{a_y} = lT(0), & M_{b_y} = lT(l). \end{cases} \tag{18}$$

en sorte qu'on aboutit, par des calculs classiques et immédiats, aux relations

$$\begin{vmatrix} M_a \\ M_b \\ M_{a_y} \\ M_{b_y} \end{vmatrix} = EA \begin{vmatrix} F_2 & F_1 & -F_4 & -F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ -F_4 & F_3 & F_6 & F_5 \\ -F_3 & F_4 & F_5 & F_6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_{a_y} \\ \varphi_{b_y} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

où $\Lambda = \frac{I}{l}$ est la rigidité de l'élément et les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, introduites habituellement [10], s'écrivent

$$(20)\quad \begin{cases} F_1 = -\lambda\,\dfrac{\sin\lambda - \operatorname{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}, & F_2 = -\lambda\,\dfrac{\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda - \sin\lambda\operatorname{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}, \\ F_3 = -\lambda^2\,\dfrac{\operatorname{ch}\lambda - \cos\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}, & F_4 = -\lambda^2\,\dfrac{\sin\lambda\operatorname{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}, \\ F_5 = -\lambda^3\,\dfrac{\operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}, & F_6 = -\lambda^3\,\dfrac{\operatorname{ch}\lambda\sin\lambda + \cos\lambda\operatorname{sh}\lambda}{1-\cos\lambda\operatorname{ch}\lambda}. \end{cases}$$

Les relations (11) et la matrice (9) modifiée comme il est indiqué au paragraphe 3 permettent d'obtenir la matrice des coefficients dynamiques de l'élément dans la représentation générale propre à l'étude d'une

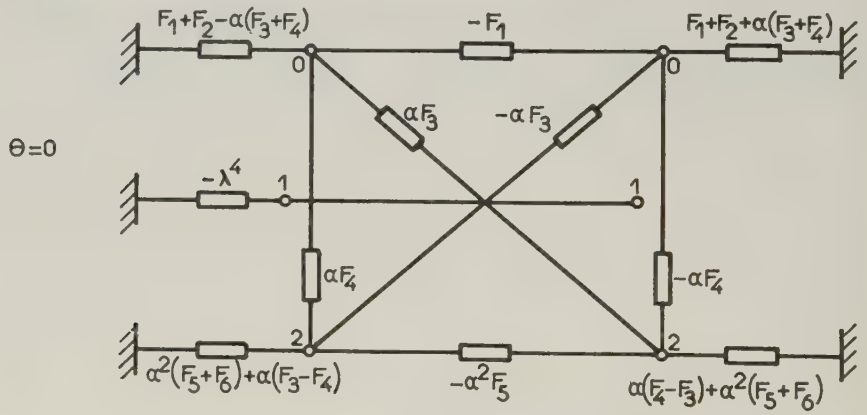

Fig. 3.

structure; en notant α le quotient $\frac{L}{l}$ et en remarquant que la masse réduite $\frac{M\omega^2 l^2}{E\Lambda}$ est identique à λ^4,

$$(21)\quad M_{ij} = \begin{array}{c|ccc|ccc} & a_0. & a_1. & a_2. & b_0. & b_1. & b_2. \\ \hline a_0 & F_2 & \alpha F_4 \sin\theta & -\alpha F_4\cos\theta & F_1 & \alpha F_3\sin\theta & -\alpha F_3\cos\theta \\ a_1 & \alpha F_4\sin\theta & \begin{cases}\alpha^2(F_6\sin^2\theta \\ \quad -\lambda^4\cos^2\theta)\end{cases} & \begin{cases}\alpha^2\sin\theta\cos\theta \\ \times(-F_6+\lambda^4)\end{cases} & -\alpha F_3\sin\theta & \alpha^2 F_5\sin^2\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_5 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} \\ a_2 & -\alpha F_4\cos\theta & \begin{cases}\alpha^2\sin\theta\cos\theta \\ \times(-F_6+\lambda^4)\end{cases} & \begin{cases}\alpha^2(F_6\cos^2\theta \\ \quad -\lambda^4\sin^2\theta)\end{cases} & \alpha F_3\cos\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_5 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} & \alpha^2 F_5\cos^2\theta \\ \hline b_0 & F_1 & -\alpha F_3\sin\theta & \alpha F_3\cos\theta & F_2 & -\alpha F_4\sin\theta & \alpha F_4\cos\theta \\ b_1 & \alpha F_3\sin\theta & \alpha^2 F_5\sin^2\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_5 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} & -\alpha F_4\sin\theta & \alpha^2 F_6\sin^2\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_6 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} \\ b_2 & -\alpha F_3\cos\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_5 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} & \alpha^2 F_5\cos^2\theta & \alpha F_4\cos\theta & \begin{cases}-\alpha^2 F_6 \\ \times\sin\theta\cos\theta\end{cases} & \alpha^2 F_6\cos^2\theta \end{array}$$

Les figures 3 et 4 représentent les réseaux correspondant aux orientations $\theta = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ utiles pour les structures à mailles rectangulaires.

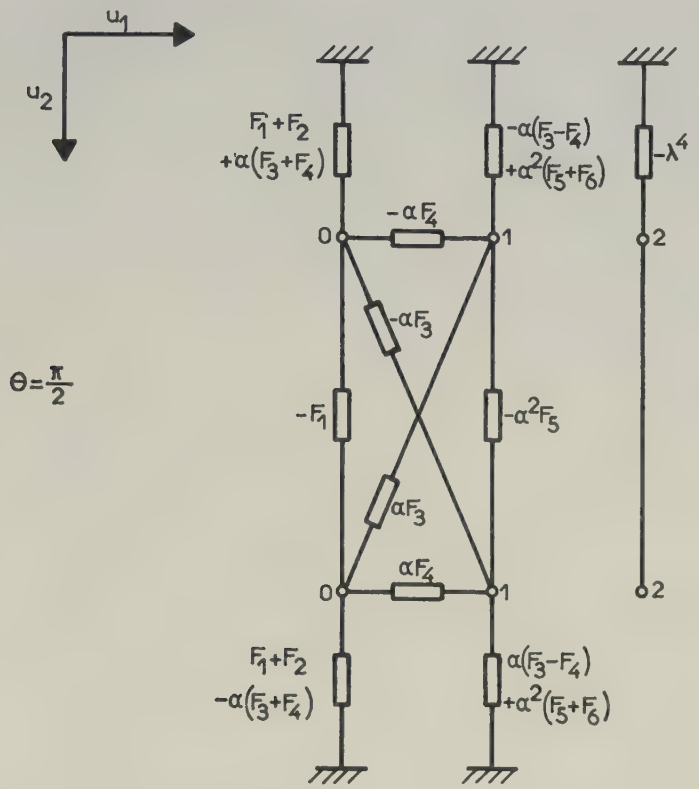

Fig. 4.

6. Étude d'une poutre complexe.

A titre d'exemple, la poutre échelle (Virendeel) représentée à la figure 5 et supposée constituée d'éléments droits identiques, associés en cellules carrées, possédant les caractéristiques étudiées au paragraphe

Fig. 5.

précédent, peut être traduite dans l'analogie proposée par association systématique des réseaux des figures 3 et 4. Le réseau obtenu se simplifie si l'on ne s'intéresse qu'aux vibrations transversales de l'ensemble; les déplacements des nœuds s'effectuant parallèlement à $\mathbf{u}_2$, on peut supprimer en les connectant à la masse les nœuds électriques décrivant les déplacements longitudinaux parallèles à $\mathbf{u}_1$, en sorte que le chaînon analogique obtenu (*fig.* 6) ne comporte au niveau de chaque traverse qu'un nœud d'indice 2 associé au déplacement longitudinal global de

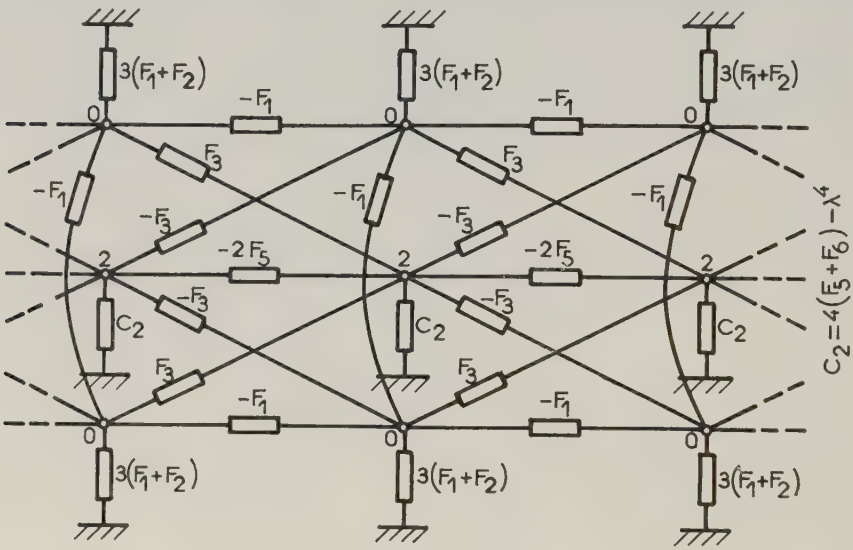

Fig. 6.

celle-ci parallèlement à $\mathbf{u}_2$ et deux nœuds d'indice o associés aux rotations de ses extrémités. Les éléments constituant la structure étant supposés identiques pour la simplification des calculs, on peut faire abstraction de leurs caractéristiques réelles qui n'interviennent que dans l'interprétation du facteur commun de proportionnalité reliant les valeurs des conductances aux valeurs des $F_i(\lambda)$ ou λ^4; ce facteur étant choisi de façon à rester dans une gamme convenable d'un point de vue pratique pour des valeurs intéressantes du paramètre λ, le réseau est déterminé pour chaque valeur de ce dernier et il est intéressant d'en noter les caractéristiques en fonction de la fréquence adimensionnelle

$$\lambda^2 = \omega l^2 \left(\frac{\rho S}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, si l'attaque envisagée ne comporte que des efforts conduisant à des modes antisymétriques pour les déplacements des nœuds, symé-

triques quant aux rotations, relativement au plan médian de la chaîne non déformée, par exemple des forces transversales au droit des traverses comme le propose la figure 5, on peut replier le chaînon analogique de la figure 6 en bénéficiant de la symétrie commune du réseau et de

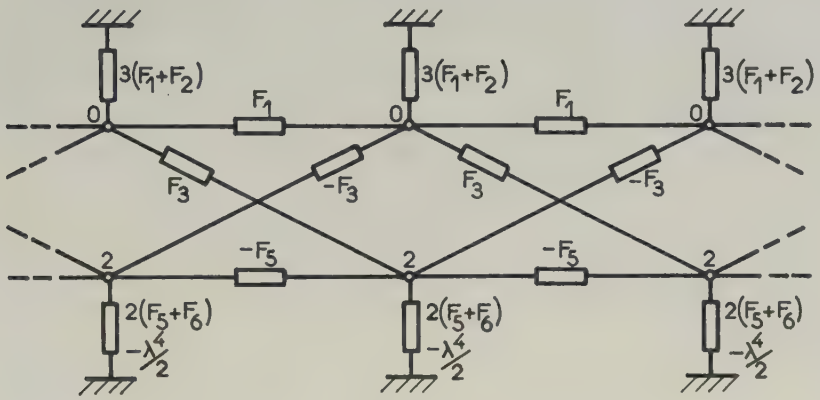

Fig. 7.

l'alimentation correspondant à de tels efforts pour obtenir celui plus simple encore de la figure 7, lequel a été étudié pour une poutre à huit cellules (*fig.* 8) montée sur appuis articulés A et B avec une liaison D interdisant tout déplacement longitudinal du bord supérieur.

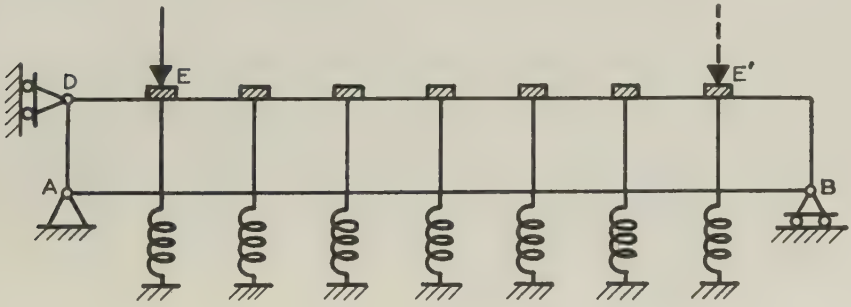

Fig. 8.

L'adjonction de conductances de fuite C en parallèle aux conductances responsables de l'inertie des traverses peut être interprétée selon la traduction analogique d'appuis élastiques et de masses disposés au niveau de celles-ci. Notant k la constante élastique de chaque appui, m la valeur de chaque masse, le bilan d'énergie associé à chaqne couple

appui-masse s'écrit à partir de la variable φ décrivant la vibration longitudinale de la traverse correspondante

$$W = \frac{1}{2}(-m\omega^2 l^2 + kl^2)\varphi^2, \tag{22}$$

en sorte que la conductance C traduisant l'effet de ce couple vaut

$$C = -m\omega^2 l^2 + kl^2 = E\Lambda(-\mu\lambda^4 + \nu), \tag{23}$$

où

$$\mu = \frac{m}{M} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{kl^2}{E\Lambda}$$

sont les expressions adimensionnelles, convenables pour ce problème, des caractéristiques des masses et des appuis envisagés.

On a effectivement réalisé des réseaux correspondant aux valeurs entières allant de 0 à 7 inclus de la fréquence adimensionnelle λ^2. Pour $\lambda = 2$, $\lambda^2 = 4$, une étude précise a été faite du comportement du réseau lorsqu'on injecte une intensité uniquement au nœud associé au déplacement vertical de la première traverse à droite de l'appui A, en variant la valeur commune C des conductances de fuite. Le problème physique ainsi étudié est celui de la réponse de la structure envisagée, montée sur appuis et chargée comme l'indique la figure 9, à une force

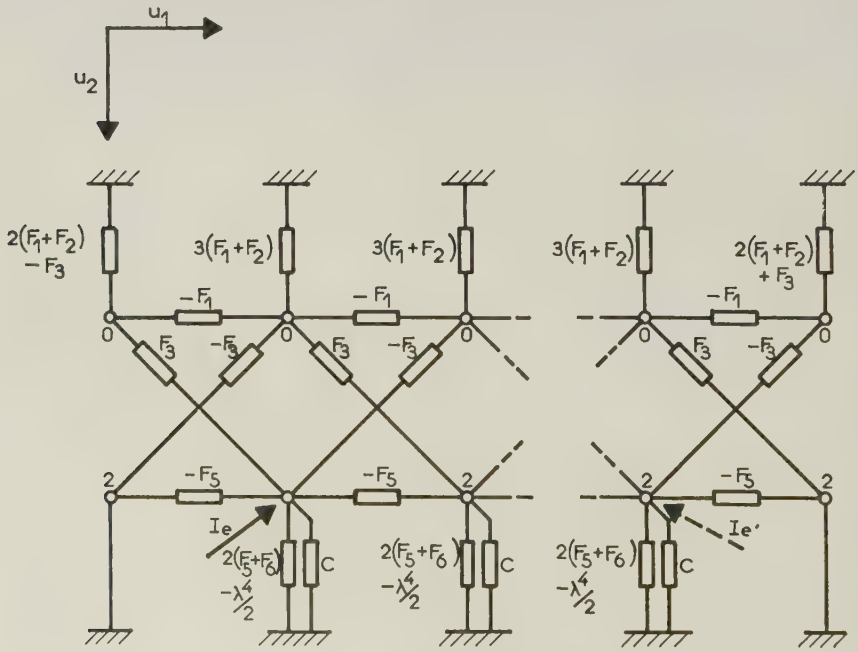

Fig. 9.

appliquée en E variant harmoniquement à une fréquence donnée lorsqu'on varie les caractéristiques communes des masses et des appuis. L'impédance observée du réseau ainsi alimenté traduit la réponse en

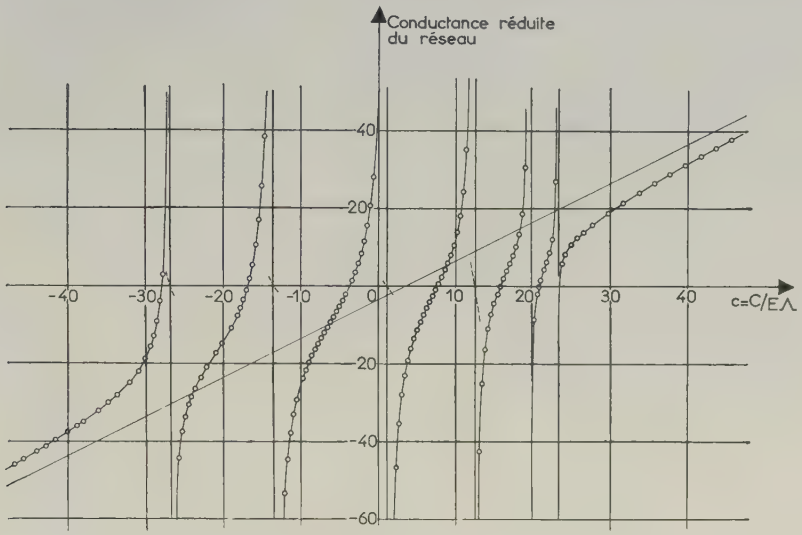

Fig. 10. — Poutre-échelle à huit maillons; $\lambda = 2$.

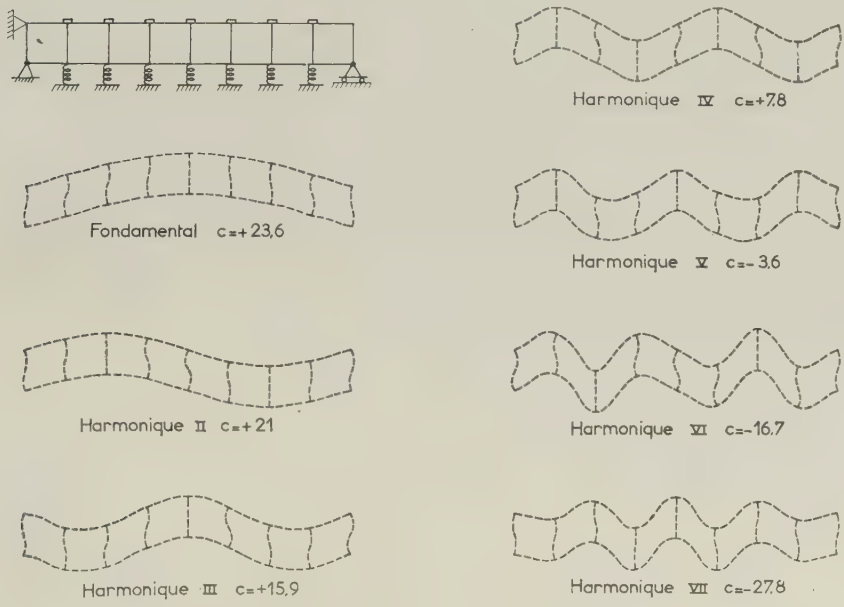

Fig. 11. — Résonances observées pour $\lambda = 2$.

amplitude au point d'attaque sous l'influence d'une force d'amplitude fixée. Pour des raisons pratiques, la conductance étant plus directement mesurable avec l'appareil utilisé, c'est la variation, exprimée adimensionnellement, de cette dernière qu'on a représenté à la figure 10; les différents modes de résonance observés et représentés à une échelle arbitraire sur la figure 11 apparaissent à l'annulation de la conductance du réseau. On notera qu'une vérification extrêmement simple de la mesure consiste à observer qu'on obtient bien les résultats géométriques

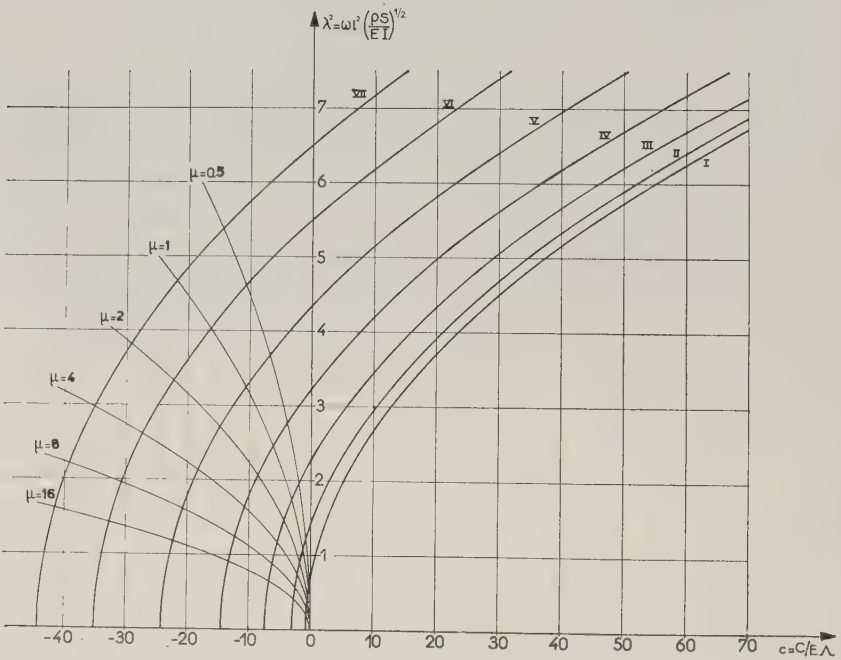

Fig. 12. — Évolution des fréquences propres en fonction de C.

symétriques en portant l'attaque en E′ malgré la non-symétrie du réseau qui doit fournir des résultats symétriques pour les déplacements mais antisymétriques pour les rotations. Pour les autres valeurs étudiées de λ^2 on s'est tenu à déterminer les valeurs de C où apparaissent les sept résonances propres à la structure. Le diagramme représenté à la figure 12 permet ainsi de déterminer les fréquences propres de n'importe quelle structure du type envisagé appuyée et chargée comme celle de la figure 8, par intersection des sept courbes obtenues, avec la courbe, en l'occurrence une parabole (ou une droite pour $\mu = 0$), correspondant aux valeurs envisagées de μ et de ν traduisant la variation de C en fonction de λ^2.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. J. Duncan et A. R. Collar, *Solution of oscillation problems by matrices* (*Phil. Mag.*, t. 17, 1934, p. 866-909).

[2] G. Kron, *Tensorial Analysis and equivalent circuits of elastic structures* (*J. Franklin Inst.*, t. 238, n° 6, 1944, p. 399-452).

[3] G. Kron, *Equivalent circuit for the numerical solution of the critical speeds of flexible shafts* (*J. Appl. Mech.*, t. 13, n° 2, 1946, p. A 109-116).

[4] S. T. Jennings, *The solution of the aircraft wing flutter problems by means of electric circuit analysis* (*Ph. D. Thesis*, Ohio State University, 1947).

[5] G. D. Mc Cann et R. H. Mac Neal, *Beam vibration analysis with the electric analog computer* (*J. Appl. Mech.*, t. 17, n° 1, 1950, p. 13-26).

[6] H. M. Trent, *An equivalent circuit for a beam which includes shear motions* (*J. Acoust. Soc. Amer.*, t. 22, 1950, p. 355).

[7] W. T. Russell, *Lumped parameter analogies for continuous mechanical systems* (*Ph. D. Thesis*, California Institute of Technology, 1950).

[8] G. Cahen, *Étude des vibrations de flexion et de torsion au moyen d'analogies électro-mécaniques* (*Assoc. Techn. Marit. et Aéron.*, t. 49, 1950, p. 459-471).

[9] N. T. Russell et R. H. Mac Neal, *An improved electrical analogy for the analysis of beams in bending* (*J. Appl. Mech.*, t. 20, 1953, p. 349-354).

[10] V. Kolousek, *Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides*, Dunod, Paris, 1959.

[11] P. Alais et R. Siestrunck, *Sur la résolution analogique des assemblages continus plans de pièces droites* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 1104-1106).

[12] P. Alais, *Sur la description analogique d'une classe de systèmes physiques et son application au calcul des ossatures hyperstatiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 409-411).

[13] P. Alais, *Calcul analogique de systèmes physiques linéaires. Application à l'étude statique d'ossatures hyperstatiques* (*J. Mécanique*, II, n° 3, 1963, p. 263-299).

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1963.)

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

La conversion magnétohydrodynamique d'énergie

Vu et approuvé :
Paris, le 29 mai 1963.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & Cie

Quai des Grands-Augustins, 55.

166961-64

Dépôt légal, Imprimeur, 1964, nº 1664.

Imprimé en France.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS & C^ie^

Quai des Grands-Augustins, 55.

166961-64

Dépôt légal, Imprimeur, 1964. n° 1664.

Imprimé en France.